note $X_k \in [\![1, N]\!]$ le numéro de la figurine de la boîte k. On pose $C_n = \{X_1, ..., X_n\}$ la collection de figurines ainsi obtenues, et on pose $U_n = \mathrm{Card}(C_n)$.
a) Préciser la loi de X_k.
b) Calculer $\mathbf{P}(U_n = 1)$.
c) Écrire une fonction `collection(n,N)` qui renvoie une collection.
d) Évaluer numériquement $\mathbf{P}(U_n = N)$. Exprimer en français à quoi correspond cet événement.
e) Écrire une fonction `seuil(a,N)` qui renvoie le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(U_n = N) \geqslant a$.
f) Tester cette fonction pour $a \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$. Exprimer en français la signification de la fonction `seuil`.
g) Exprimer $\mathbf{P}(X_n \in \{X_1, ..., X_{n-1}\})$ en fonction de U_{n-1} et de N.
h) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}(U_n = N) = 1$.

1106. On dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On lance cette pièce jusqu'à obtenir Pile. Si Pile apparait pour la première fois au N^e lancer, on effectue une série de N lancers avec cette même pièce et on note X le nombre de Pile obtenus au cours de cette deuxième série de lancers.
a) Déterminer la loi de N.
b) Déterminer la loi du couple (N, X).
c) Déterminer la loi de X et son espérance.

1107. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la valeur de $\mathbf{P}(X_1 = k)$.
b) Montrer par récurrence que $\mathbf{P}(S_n = k) = \begin{cases} \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$

1108. On considère $p + 1$ urnes numérotées de 0 à p. L'urne numéro i contient i boules blanches et $p - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne. On note N_p la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.
a) Quelle est la loi de N_p ?
b) Calculer l'espérance de N_p.
c) Existence et calcul éventuel de $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbf{P}(N_p = j)$?

1109. PYTHON. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables géométriques indépendantes de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $q = 1 - p$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit
$C(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}^* \,;\, X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\}$.
a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k)$, $\mathbf{P}(X_2 \geqslant X_1,\ X_1 = k)$ puis $\mathbf{P}(C \geqslant 2)$.
b) Écrire une fonction informatique `geomCr(q)` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire C.
c) Programmer une fonction `nbGeomCr(q)` qui renvoie la moyenne de C observée au cours de 1000 réalisations. On suppose que C a une variance.
Pourquoi peut-on dire que `nbGeomCr(q)` est une valeur acceptable de $\mathbf{E}(C)$?

d) Tracer `nbGeomCr(q)` en fonction de $q \in]0, 1[$.
Que peut-on conjecturer sur les limites aux bornes ?
e) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$\mathbf{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \frac{(1-q)^n\, q^{n(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$
f) Calculer $\mathbf{E}(C)$ en fonction de q.
g) Démontrer les propriétés conjecturées à la question ***c)***.

1110. Soit X une variable aléatoire réelle ayant un moment d'ordre 2.
a) Soient I une partie de $\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\, g(x) \geqslant b$.
Montrer que $\mathbf{P}(X \in I) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(g(X))}{b}$.
b) On suppose que X est une variable centrée d'écart-type σ.
En considérant $g(x) = (x + \varepsilon)^2$ avec $\varepsilon > 0$, montrer que $\forall t > 0,\, \mathbf{P}(X > t) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$.
c) On suppose X à valeurs positives.
Montrer que $t \longmapsto \mathbf{P}(X > t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\mathrm{d}t$.

Autres Écoles - MP

Algèbre

1111. *CCINP.* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs distinctes. Déterminer le nombre de $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $v^2 = u$.

1112. *CCINP.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$. En déduire que si P annule u alors, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \times Q$ annule u.
b) Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que $X^4 + 2X^3 - X^2 + 6X$ annule A.

1113. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.
a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. Déterminer la limite de $(v_n(x))$.
b) Soit $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{Ker} - \mathrm{id})$. Déterminer la limite de $(v_n(x))$.
c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) = E$.
d) Montrer que (v_n) converge vers le projecteur sur $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

1114. *CCINP.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique c'est-à-dire tel que, pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.
a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$ et $\langle f^2(x), x\rangle \leqslant 0$.

b) Soit e une base orthonormée de E. Que peut-on dire de la matrice A de f dans e.
c) En calculant $\det(A^T)$, montrer que si f est inversible alors la dimension de E est paire.
d) Montrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^-$.

Analyse

1115. *CCINP.* ***a)*** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On suppose $u_n \sim v_n$. Montrer que, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.
b) Déterminer le signe de $\mathrm{sh}(1/n) - \mathrm{th}(1/n)$ lorsque $n \to +\infty$.

1116. *IMT.* Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. Déterminer en fonction de a, b, c la nature de $\sum u_n$.

1117. Soit $f : x \mapsto e^{2x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
a) Donner les dérivées n-ièmes de f et de g.
b) Déterminer la dérivée n-ième de $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.

1118. *IMT.* Soit $F : \alpha \mapsto \alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.

1119. *CCINP.* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\,e^{-nx}}{\ln(n)}$.
a) Étudier la convergence simple et la convergence normale de cette série de fonctions.
b) Soit $A > 0$. Montrer l'existence de M tel que : $\forall x \in [0, A]$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x\,e^{-kx}}{\ln(k)}\right| \leqslant \dfrac{M}{\ln(n)}$. Que peut-on en déduire ?
c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
d) Montrer que, pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-kx}}{\ln(k)}$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

1120. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $f(0)$ existe.
b) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$. On admet que f est continue en 0.
c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$?
d) Déterminer f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
e) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1121. *CCINP.* Soit (E) l'équation différentielle $x\,y'' + y' + x\,y = 0$.

a) Justifier l'existence d'une unique solution J_0 de (E) développable en série entière au voisinage de l'origine et telle que $J_0(0) = 1$.
b) Montrer que $J_0 : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\,x^{2n}$.
c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
d) Montrer que $J_0 : x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

1122. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Justifier la diagonalisabilité de A. Donner une base de vecteurs propres.
b) Résoudre le système différentiel $(x' = x + 2z,\ y' = y,\ z' = 2x + z)$.

Probabilités

1123. *CCINP.* ***a)*** Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{p}{n}\,\mathbf{P}(X = n-1)$. Déterminer la loi de X.
b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
i) Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{1+X_1}\right)$.
ii) Donner la loi de $X_1 + X_2$.
iii) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Préciser l'espérance et la variance.
c) Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On pose $U = X_1 + X_2$ et $V = X_2 + X_3$. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de (U, V).

Autres Écoles - PSI

Algèbre

1124. *IMT.* Soient $m, a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système $\begin{cases} mx + my + mz + t = a \\ x + my + z + mt = b \end{cases}$.

1125. *ENSEA.* Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1126. *CCINP.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4.
a) Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$.
i) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Soit u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$.
i) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u^2)$.

ii) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1127. *CCINP.* Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f + f^3 = 0$ et A sa matrice dans la base canonique.
a) Montrer que A n'est pas inversible.
b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + I_3)$.
c) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ n'est pas réduit au vecteur nul.
d) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1128. *CCINP.* ***a)*** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = n$.
i) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$.
ii) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 2n$.
i) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$.
ii) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1129. *ENSEA.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
d) Retrouver cette expression en observant que $A = I_3 + N$, où N est une matrice nilpotente.

1130. *IMT.* Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculer le déterminant de A.
b) À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

1131. *IMT.* Soient E un espace vectoriel de dimension trois, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.
a) Donner une base de l'image et du noyau de f_a.
b) Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
c) Calculer A^2. Qu'en déduire ?
d) Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

1132. *ENSEA.* Soit ψ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $P + P'$.
a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit M_ψ la matrice représentant ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Cette matrice est-elle inversible ?
c) Pour $n = 2$, cette matrice est-elle diagonalisable ?

1133. *IMT.* Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $A_{1,1} + A_{2,1} = A_{1,2} + A_{2,2} = 1$, et f l'endomorphisme canoniquement associé.
a) Montrer que si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.
b) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f et préciser la valeur propre associée.
c) Montrer que, si V est un vecteur propre non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

1134. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
b) Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
c) Les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

1135. *Navale.* ***a)*** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si A est inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$; montrer que ce résultat reste valable pour A quelconque.
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On note E_λ et F_λ les sous-espaces propres de $f \circ g$ et $g \circ f$ associés à λ.
b) Soit λ une valeur propre non nulle de $f \circ g$. Montrer que λ est une valeur propre de $g \circ f$ puis que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$. En déduire que E_λ et F_λ sont de même dimension.

1136. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \\ j & 1 & j^2 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto AMA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Déterminer l'image de Φ ainsi que ses valeurs propres.

1137. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable et de rang 1. On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \beta = \gamma, \beta + \gamma \neq 0$ et $\beta\gamma \neq 0$.
a) Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de B ?
b) Montrer que, si X est dans le noyau de A, $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de B.
c) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker} B) \geqslant 2\dim(\operatorname{Ker} A)$.
c) Montrer que B est diagonalisable.

1138. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.
b) Donner les droites stables par A.
c) Donner les plans stables par A.

1139. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
a) Donner le rang de A ; en déduire la dimension du noyau.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
d) Montrez que A admet trois valeurs propres $0, \lambda, 1 - \lambda$.
e) Donnez un polynôme annulateur de A de degré 3.

1140. *CCINP.* Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on se donne une matrice M vérifiant les hypothèses suivantes : $M^4 = 4M^2$, et -2 et 2 sont des valeurs propres de M.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$.
b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

1141. *CCINP.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.
a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.
b) On suppose dans cette question seulement que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable puis que $\operatorname{tr}(M)\ \det(M) \neq 0$.
c) Montrer que M est diagonalisable.
d) Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

1142. *CCINP.* Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
a) Calculer le rang de B en fonction du rang de A.
b) Exprimer χ_B en fonction de χ_A.

c) On suppose que A est inversible et possède n valeurs propres distinctes. Montrer que B est diagonalisable.
d) Le résultat demeure-t-il vrai pour une matrice A diagonalisable non inversible ?

1143. *CCINP.* ***a)*** Énoncer le théorème de Cayley & Hamilton.
b) Soient A, B, C, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AC = CB$ et que $C \neq 0$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$.
c) Montrer qu'un produit de matrices est inversible si et seulement si tous ses facteurs le sont. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.
d) Réciproquement, si A et B ont une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC = CB$.

1144. *CCINP.* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.
a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de A, alors les valeurs propres de A sont racines de P.
b) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
c) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver : $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.
d) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

1145. *CCINP.* Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $B = 0$.

1146. *CCINP.* Soit $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A(T) = \prod_{k=1}^{n} (T - a_{k,k})$.
a) Montrer que toute matrice triangulaire est dans $\mathcal{D}_n$.
b) La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 est-elle dans $\mathcal{D}_n$?
c) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
d) Montrer que, si M appartient à $\mathcal{D}_n$, alors $M + aI_n$ appartient à $\mathcal{D}_n$ pour tout réel a.
e) Montrer que toute matrice de $\mathcal{D}_2$ est triangulaire.
f) Exhiber un ensemble infini de matrices de $\mathcal{D}_3$ nilpotentes non triangulaires.

1147. *CCINP.* Soient E un espace euclidien de dimension n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E telle que $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1$.
a) Montrer que, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \right)$.
b) En déduire que la famille $(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n)$ est une base de E.

1148. *CCINP.* Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ on pose $\psi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\ ;\ P(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.
c) Déterminer la distance à E du polynôme constant égal à 1.

1149. *CCINP.* ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On distinguera les cas n pair et n impair. *Ind.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

b) Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

i) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
ii) Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

1150. *IMT.* Soient $p \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = A A^T$ et $A^p = 0$. En considérant la matrice $B = A^T A$, montrer que $A = 0$.

1151. *CCINP.* Soient A et B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \dfrac{1}{3}(A + 2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer $AB^T + BA^T$. *Ind.* Calculer MM^T.
b) Montrer que $A = B$.

1152. *CCINP.* Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix}$.
a) Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.
b) Montrer que $M^{-1} M^T$ est une matrice orthogonale.

1153. *CCINP.* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $M^T M = M M^T$.
a) Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
b) Déterminer les matrices vérifiant ces hypothèses dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Analyse

1154. *CCINP.* Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\mathrm{d}t$.
a) Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Montrer que, si E est un espace vectoriel réel muni d'une norme N, si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \to N(x)$.
c) Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

1155. *CCINP.* On note $E = \{f \in C^1([0,1]),\ f(0) = 0\}$. On pose, pour toute fonction $f \in E$: $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$.
a) Montrer que N et N' sont des normes sur E.
b) Établir, pour tout $x \in [0,1]$: $e^x f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t \big(f(t) + f'(t)\big)\mathrm{d}t$.

c) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leqslant N(f) \leqslant \beta N'(f)$.

1156. *IMT.* ***a)*** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution $x_n \in]0,1]$.
b) Montrer que $x_n \to 0$ puis que $x_n \sim e^{-n}$.
c) Obtenir un développement asymptotique de x_n.

1157. *IMT.* ***a)*** Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On la note a_n.
b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$.
c) Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

1158. *IMT.* Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi(\sqrt{2}+1)^n)$.

1159. *CCINP.* ***a)*** Montrer que, pour x dans un domaine D à préciser, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

b) Montrer que $\pi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$.

1160. *Navale.* Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

1161. *CCINP.* Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,\pi[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
a) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
b) Montrer que la série de terme général u_n^3 converge. *Ind.* Considérer $u_{n+1} - u_n$.
c) Montrer que la série de terme général u_n^2 diverge. *Ind.* Considérer $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

1162. *ENSEA.* Soit, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
a) Montrer que $u_n = v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
b) Déterminer la nature des séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$.
c) Montrer que $v_n \sim u_n$. Conclusion ?

1163. *CCINP.* Soient (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.
a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.
b) Montrer que, si la série de terme général a_n converge, alors la suite (u_n) converge.
c) La réciproque est-elle vraie ? *Ind.* Considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1164. *IMT.* On cherche les applications f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{f(x+n) - f(x)}{n}$.

a) Soit f vérifiant $(*)$.

i) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(x+1)$.

ii) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.

b) Donner toutes les solutions du problème posé.

1165. *CCINP.* On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (E) :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)\,f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$.

a) Résoudre, selon la valeur du réel c, l'équation différentielle $y'' - cy = 0$.

b) Soit $F : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

c) Soit f une solution de (E). Calculer $f(0)$ et $f''(x)\,f(y) - f(x)\,f''(y)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

1166. *IMT.* Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - t\arctan(1/t)\big)\mathrm{d}t$.

1167. *ENSEA.* Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de I et de J.

b) Montrer que $I = J$.

c) Calculer $I + J$; en déduire la valeur de I.

1168. *CCINP.* Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1 - e^{-nx}}{x^a\,(1+x^2)}$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

b) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?

c) Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.

d) Pour $a \in [0,1[$, montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

e) Qu'en est-il pour $a = 1$?

1169. *CCINP.* Soit $F : x \mapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) + F(1-x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pourra procéder par intégration par parties.

1170. *CCINP.* On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Montrer que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

c) On note respectivement R et f le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$.

ii) En déduire la valeur de R.

iii) Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

1171. *CCINP.* Soit f définie sur $I =]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.

a) Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.

b) Justifier l'intégrabilité de f sur I.

c) Donner, au voisinage de 1, un développement de f en série entière.

d) Calculer l'intégrale de f sur I.

1172. *CCINP.* Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\mathrm{d}t$ et D son domaine de définition.

a) Montrer que $]-1,1[\subset D$.

b) Trouver un développement en série entière de F.

c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

d) Fournir une expression simple de F' sur $[0,1[$.

e) Proposer une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

1173. *CCINP.* On souhaite montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

b) Donner le développement en série entière de $\ln(1-t)$ et transformer le problème en un problème d'interversion intégrale/somme.

c) Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(t^2)t^{2n-2}\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'égalité demandée.

1174. *ENSEA.* Déterminer les solutions de $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ développables en série entière.

1175. *CCINP.* On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

a) Déterminer les solutions polynomiales de (E).

b) Trouver une équation différentielle (E^*) vérifiée par $x \mapsto z(x) = x\,y(x)$.

c) Chercher a, b et c tels que $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

d) Résoudre (E^*) ; en déduire toutes les solutions de (E).

1176. *CCINP.* Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
c) Donner les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

1177. *IMT.* On considère le système $(S) : \begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$.
a) Existence et unicité des solutions de (S).
b) Montrer que si (x, y, z) est une solution, alors $x+y+z$ et $x^2+y^2+z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?
c) Résoudre (S).

1178. *CCINP.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.
a) Montrer que f est continue.
b) Exprimer les dérivées partielles de f.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
d) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

Probabilités

1179. *IMT.* On estime qu'il y a une chance sur 10^6 pour qu'un élève soit un génie. On dispose d'un échantillon de 500000 élèves. Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.
a) Quelle est la loi de X ?
b) Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

1180. *CCINP.* Une urne contient N boules, r blanches et $N-r$ noires. On effectue des tirages successifs sans remise, jusqu'à épuisement des boules blanches. Soit X le nombre de tirages nécessaires.
a) Identifier la loi de X et donner son espérance pour $r = 1$ et pour $r = N$.
b) Dans la suite, r est quelconque, compris entre 1 et N.
i) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
ii) Montrer que, pour de telles valeurs de k, $\mathbf{P}(X = k) = \dbinom{k-1}{r-1} / \dbinom{N}{r}$.
c) Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Trouver une relation liant $\dbinom{p}{q}$ et $\dbinom{p-1}{q-1}$.
En déduire que $\mathbf{E}(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.

1181. *CCINP.* Dans une urne contenant n tickets dont p gagnants, un joueur tire avec remise p tickets.

a) Calculer la probabilité $P(n,p)$ pour que le joueur tire au moins un ticket gagnant.
b) On suppose $p = \sqrt{n}$. Calculer la limite lorsque p tend vers l'infini de $P(p^2, p)$. On donne $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
c) Reprendre les questions précédentes lorsque le joueur tire p tickets sans remise.

1182. *CCINP.* On dispose d'une urne qui contient trois jetons numérotés 1,2,3, et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.
a) Déterminer la loi de Y.
b) Quelle est la loi de $Y - 1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.
c) Déterminer la loi de (Y, Z).
d) En déduire la loi de Z.

1183. *CCINP.* Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.
a) Soit B_i l'événement « on tire i boules blanches ». Calculer $\mathbf{P}(B_i)$.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2}$.
c) Calculer la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

1184. ***a)*** Soient $c \in \mathbb{R}^+$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{c}{k(k+1)}$. Trouver a, b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
En déduire la valeur de la constante c.
b) Jacques et Isabelle jouent à un jeu. Si X prend une valeur paire k, Isabelle donne k euros à Jacques ; si X prend une valeur impaire k, Jacques donne k euros à Isabelle. Déterminer l'espérance de gain de Jacques.

1185. *CCINP.* On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $1/2$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$. Il s'agit de déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.
a) En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$, montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
b) Conclure

1186. *CCINP.* Soit $p \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $p_k = p^2 k (1-p)^{k-1}$.
a) Montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
b) Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = p_k$. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbf{E}(X-1)$ puis de $\mathbf{E}\big((X-1)(X-2)\big)$.
c) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(X)$ et de $\mathbf{V}(X)$.

1187. *CCINP.* ***a)*** Pour $r \in \mathbb{N}^*$, donner le développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^r}$, ainsi que le rayon de convergence.
b) Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \dbinom{k+r-1}{k} p^r q^k$. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
c) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = p_k$. Déterminer la fonction génératrice de X.
d) En déduire l'espérance et la variance de X.

1188. *CCINP.* Un secrétaire doit joindre par téléphone n clients. Il les appelle un par un, les appels étant indépendants, et la probabilité qu'un client donné décroche est p. Soient $q = 1-p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de clients joints après une série d'appels.
a) Déterminer la loi de X. Préciser $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
Le secrétaire passe ensuite des appels aux clients qui n'ont pas été joints lors de la première vague d'appels. Soient Y et Z les variables aléatoires égales au nombre de clients joints lors de la deuxième vague d'appels et au nombre total de clients joints.
b) i) Exprimer Z à l'aide de X et Y. Préciser les valeurs possibles pour la variables Z.
ii) Calculer $\mathbf{P}(Z = 0)$. Montrer que $\mathbf{P}(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$.
iii) Soient $k \in [\![0,n]\!]$ et $h \in [\![0,k]\!]$. Exprimer $\mathbf{P}(Y = h | Z = k)$.
iv) Soit $s \in [\![0,n]\!]$. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{s-k} = \dbinom{n}{s}\dbinom{s}{k}$ pour tout k. Montrer que $\mathbf{P}(Z = s) = \dbinom{n}{s}(1-q^2)^s(q^2)^{n-s}$ En déduire la loi de Z.

1189. *CCINP.* Soient $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{p}_n = \dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$.
a) Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \overline{p}_n\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.
b) On suppose que $\overline{p}_n \to p$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

1190. *CCINP.* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, admettant un moment d'ordre deux, telles que $Z = X + Y + 1$ suive la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
a) Déterminer l'espérance et la variance de X en fonction de p.
b) Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.

1191. *IMT.* Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.
a) Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.
b) Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.
c) Calculer l'espérance de X.

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2}$.

1192. *CCINP.* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.
a) Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. Déterminer α tel que $\dbinom{n}{k} = \alpha\dbinom{n-1}{k-1}$.
b) Déterminer a.
c) Calculer l'espérance de X.
d) Calculer la variance de X.

Autres Écoles - PC

Algèbre

1193. *IMT.* Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

1194. *CCINP.* ***a)*** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$.

1195. *CCINP.* On pose $z_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leqslant k < n$.
a) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x - z_k) = \frac{x^n - 1}{x-1}$.
b) En déduire la valeur du produit $C_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1196. *CCINP.* Soient q un entier $\geqslant 2$, $Q = qX^q - (X^{q-1} + X^{q-2} + \cdots + X + 1)$ et $R = (X-1)Q$.
a) Vérifier que $Q(1) = 0$ et que $R = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.
b) Soit z une racine complexe de Q. Montrer que $|z| \leqslant 1$. *Ind.* On pourra raisonner par l'absurde et comparer $|z|^k$ et $|z|^q$ pour tout k compris entre 0 et $q-1$.
On admettra que 1 est la seule racine de module 1 du polynôme Q.
c) Montrer que 1 est racine double de R. Montrer que les racines de R autres que 1 sont simples. En déduire que toutes les racines de Q sont simples.
d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont des racines de Q. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection.
e) Démontrer le résultat admis en ***b)*** .

1197. *CCINP.* Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1198. *Navale.* Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les racines des polynômes $X^3 - 2X + 1$ et $X^3 - 2X - 4$.
b) Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice D.
c) Résoudre l'équation $M^3 - 2M = D$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
d) Résoudre l'équation $M^3 - 2M = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1199. *CCINP.* On note V l'ensemble des suites complexes $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = v_{n+2} + v_n$.
a) Montrer que V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
b) i) Soit $P(X) = X^3 - X^2 - 1$. Montrer que P a une unique racine réelle b.
Ind. Faire une étude de fonction.
ii) Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tel que $P(X) = (X - b)(X - z)(X - \overline{z})$.
c) i) Soit $\Phi : V \to \mathbb{C}^3$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (v_0, v_1, v_2)$. Montrer que Φ est un isomorphisme. Quelle est la dimension de V ?
ii) Déterminer les suites géométriques qui appartiennent à V. En déduire une base de V.
d) On dit qu'une partie S de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est spéciale si pour tout $\rho \in S$, $\rho + 1$ et $\rho + 2$ n'appartiennent pas à S. On note t_n le nombre de parties spéciales de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on convient que $t_0 = 1$. Calculer t_1, t_2 et t_3. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à V.

1200. *CCINP.* Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1201. *CCINP.* Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Donner le rang et une base de l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
b) Montrer que l'endomorphisme g induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$ est diagonalisable.

1202. *IMT.* Soit $a > 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Calculer ses espaces propres.

1203. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que A est semblable à jA avec $j = e^{2i\pi/3}$.
a) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $j\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
b) En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
c) Montrer que $A^2 = 0$.
d) Est-ce encore valable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

1204. *CCINP.* Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que λ est une valeur propre de $v \circ u$.
Ind. Distinguer les cas $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$.

1205. *CCINP.* Pour a, b réels, on pose $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ a & b & a \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ et $J = M(0, 1)$, $K = M(1, 0)$.
a) Déterminer les éléments propres des matrices J et K.
b) Les matrices J et K ont-elles une base commune de vecteurs propres ?

1206. *CCINP.* Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :
$P_0 = 1, P_1 = X$ et $\forall k \geqslant 2,\ P_k = \dfrac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n'(X) = P_{n-1}(X - 1)$
ii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X - k)$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Φ_n l'application $Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \Phi_n(Q)(X) = Q(X) - Q'(X+1)$.
i) Montrer que Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Exprimer, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\Phi_n(P_k)$ dans la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
ii) Montrer que Φ_n a une unique valeur propre et déterminer l'espace propre associé. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?
d) Montrer que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $\Phi_n^{-1}(P_k)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1207. *CCINP.* Soient $M = (m_{p,q})$ et $B = (b_{p,q})$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $m_{p,q} = 0$ si $p = q$, i si $p > q$ et $-i$ sinon, et $b_{p,q} = 1$.
a) i) Soit $\alpha = e^{i\pi/n}$. Que vaut α^n ?
ii) Résoudre l'équation $z^n = -1$ dans $\mathbb{C}$.
b) i) Montrer que $(X - i, X + i)$ est base de $\mathbb{C}_1[X]$.
ii) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $A(\lambda) = \lambda I_n - M$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \det(A(\lambda) + zB)$.
Justifier qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z + i) + b(z - i)$.
iii) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \dfrac{(\lambda + i)^n}{2i}(z + i) - \dfrac{(\lambda - i)^n}{2i}(z - i)$.
c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M.
Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ et l'expliciter.
d) La matrice M est-elle diagonalisable ?

1208. *IMT.* Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

1209. *CCINP.* Soient E un espace euclidien et $(a, b) \in E^2$.
Pour $x \in E$, on pose $f(x) = x - \langle a, x\rangle b$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Montrer que f est bijectif si et seulement si $\langle a, b\rangle \neq 1$.

1210. *CCINP.* ★ On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\mathrm{d}t$.

a) Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
b) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle T, P\rangle = P(0)$.

1211. *CCINP.* Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, α un réel et $a \in E$ un vecteur de norme 1. On définit un endomorphisme de E dans E par $f_\alpha(x) = x + \alpha\,\langle x, a\rangle\, a$.
a) Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Vect}(a)^\perp$. Montrer que $(a, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E. Écrire la matrice de f_α dans cette base.
b) Calculer $f_\alpha(f_\beta(x))$, montrer que $f_\alpha \circ f_\beta$ est de la forme f_γ et exprimer γ en fonction de α et β. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est elle bijective ? Exprimer alors sa réciproque.
c) On pose $s_a(x) = x - 2\,\langle x, a\rangle\, a$. Soit V un sous-espace vectoriel de E tel que $s_a(V) = V$. Montrer que $s_a \in \mathcal{O}(E)$, que $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$ puis que $s_a(V^\perp) = V^\perp$.
d) Soit $g \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.

1212. *CCINP.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^TA = I_n$.
a) Montrer que A est inversible.
b) Montrer que A est symétrique.
c) Montrer que $A = I_n$.

Analyse

1213. *CCINP.* ***a)*** Calculer la limite de $R_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$.

b) Trouver un équivalent de $S_n = \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}$.

1214. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
a) Rappeler de développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.
b) Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle I_n et que $x_n \sim n\pi$.
c) On pose $y_n = x_n - n\pi$.
  i) Montrer que $y_n = \arctan x_n$ et donner la limite de (y_n).
  ii) Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2}\right) \sim y_n - \dfrac{\pi}{2}$ et déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $y_n - \dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{c}{n}$.
d) Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi}\right) = \dfrac{x_n \tan(1/n\pi) - 1}{x_n + \tan(1/n\pi)}$.
e) Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_n = an + b + \dfrac{c}{n} + \dfrac{d}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

1215. *Navale.* ***a)*** Convergence et somme de la série $\sum_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k^2-1}$.

b) Convergence et somme de la série $\sum \dfrac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k+1}$.

1216. *IMT.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$.
a) Justifier que la série $\sum u_n$ converge. On note S sa somme.
b) Justifier l'existence et calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \tan(\arctan(n+1) - \arctan(n))$.
c) En déduire la valeur de u_n puis la somme S.

1217. *IMT.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n+3}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 u_n$.
a) Donner la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.
b) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

1218. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $v_n = (-1)^n u_n$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On admet l'existence d'un réel γ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
a) Étudier les variations de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
b) Comparer u_n à $\dfrac{1}{n}$. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et v_n.
c) Exprimer $S_{2n} - S_n$ avec une seule somme et montrer par comparaison série-intégrale que $\dfrac{\ln^2(2n+1)}{2} - \dfrac{\ln^2(n+1)}{2} \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant \dfrac{\ln^2(2n)}{2} - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$.
d) Montrer que $S_{2n} - S_n = \dfrac{\ln^2(2)}{2} + \ln(2)\ln(n) + o(1)$.
e) Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de H_n et S_n. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

1219. *CCINP.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$ et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$.
a) Montrer que la série de terme général v_n converge.
b) i) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^x u e^{-u}\mathrm{d}u$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.
  ii) Montrer que I_n est bien défini et que $I_n = 2(1+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}$.
  ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. Montrer que $I_{n+1} \leqslant R_n \leqslant I_n$. En déduire un équivalent de R_n quand $n \to +\infty$.
  iii) On pose $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{R_n}{\sqrt{e}}$.

1220. *IMT.* Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit la fonction $T(f)$ par $T(f)(0) = f(0)$ et $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \neq 0$.

a) Montrer que, pour $f \in E$, $T(f)$ est continue en 0.
b) Montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0,\ xT(f)'(x) + T(f)(x) = f(x)$.
c) Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T. Montrer qu'un vecteur propre associé à λ vérifie $y' = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x}y$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire que le spectre de T est inclus dans $]0,1]$.

1221. *CCINP.* Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{2x-a}(t-a)^k\mathrm{d}t = \lambda_k(x-a)^{k+1}$.
b) Soit $u \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 2u(2x-a)$.
  i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u\left(\dfrac{(2^n-1)a+x}{2^n}\right) = 2^n u(x)$.
  ii) Montrer que u est la fonction nulle.
c) Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :
$g(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_x^{2x-a} f(t)\mathrm{d}t$ si $x \neq a$ et $g(a) = f(a)$.
d) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \neq a$.
e) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
f) Montrer que Φ est injectif. Est-il surjectif ?
g) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Φ stabilise l'espace $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$ et que l'endomorphisme induit par Φ sur $\mathcal{P}_n$ est diagonalisable.

1222. *CCINP.* ***a)*** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}$ existe.

b) On définit $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n\sqrt{t-1}}$.
  i) Pour quels entiers n cette intégrale est-elle définie ?
  ii) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.
c) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$. Déterminer le domaine de définition et étudier la continuité de f.

d) Pour $u \in]-1,1[$, montrer que $(1-u)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}u^n$.

e) Pour $t > 1$ et x assez proche de 0, montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{t(t-x)}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{t^{n+1}}$.
f) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.

1223. *CCINP.* ★ ***a)*** Rappeler le développement en série entière en 0 de l'exponentielle ainsi que son rayon de convergence.

Soient $A > 1$ et $M \geqslant 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1,A],\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\int_1^A t^k f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $h \in]1,A]$. On pose $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{X}{h}\right)^{pk}$.

b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_1^A P_n(t)f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!h^{pk}}$.

En déduire que $\left|\displaystyle\int_1^A (e^{-(t/h)^p}-1)f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(e^{(1/h)^p}-1)$.

c) Préciser $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}(e^{-(t/h)^p}-1)$ et montrer que $\displaystyle\int_h^A f(t)\mathrm{d}t = 0$.
d) Montrer que la fonction f est nulle.

1224. *CCINP.* Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^k\mathrm{d}\theta$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}$.
a) Rappeler la formule de Stirling.
b) ***i)*** Justifier l'existence de I_k et montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2}I_k$.
  ii) Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, I_{2k} à l'aide de factorielles.
c) Retrouver le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
d) Justifier l'existence de $f(x)$ et montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2 x^{2k}$.
e) Déterminer la limite de f en -1.

1225. *CCINP.* ***a)*** Rappeler la formule de Stirling.
b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\mathrm{d}t$.
  i) Justifier l'existence de I_n.
  ii) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I_{n+1} = (n+1)I_n$ et en déduire I_n.
c) Étudier les variations de la fonction $S : x \geqslant 1 \mapsto (1+x)e^{-x}$.
En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S(x)^n \leqslant \left(\dfrac{2}{e}\right)^{n-1} S(x)$.
d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\mathrm{d}t = 0$.
e) On admet que $\forall x \geqslant 1$, $\ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
Montrer que $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}x}\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

f) À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{t-n}{\sqrt{n}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que

$$\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}u}\mathrm{d}u \longrightarrow \sqrt{2\pi},$$

et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$.

1226. *IMT.* Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1227. *CCINP.* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^x}$.
a) Vérifier que f est bien définie sur $]1/2, +\infty[$.
b) i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 2n(f(n) - f(n+1))$. *Ind.* Intégrer par parties.
ii) En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de $f(n)$ à l'aide de factorielles et de puissances de 2.
c) Soient x et y dans $]1/2, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$.
d) Montrer que f est continue sur $]1/2, +\infty[$.
e) i) Que dire de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$?
ii) Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et retrouver le résultat précédent.

1228. *CCINP.* Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t}\mathrm{d}t$.
a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que F est positive et décroissante.
Déterminer sa limite en $+\infty$.
c) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer l'expression de $F(x) - F'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que F est de classe C^∞.
d) Montrer que, pour $x > 0$, $F(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.
En déduire limite et équivalent de F en 0^+.

1229. *CCINP.* ***a)*** Montrer que, pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{e^t+1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-nt}$.

b) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+1}\mathrm{d}t$ et l'exprimer comme somme d'une série.

1230. *CCINP.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$ la suite $2p$-périodique telle que $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_p = 1$ et $\varepsilon_{p+1} = \cdots = \varepsilon_{2p} = -1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{k}$.

a) On suppose tout d'abord $p = 1$, c'est-à-dire $\varepsilon_k = (-1)^{k-1}$.
i) Montrer que la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.
ii) Pour $t \in [0, 1[$, montrer que $\sum(t^{2k} - t^{2k+1})$ converge.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

b) On revient au cas général. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=2pn+1}^{2p(n+1)}\frac{\varepsilon_k}{k} \leqslant \frac{1}{4n^2}$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum\frac{\varepsilon_k}{k}$.

1231. *IMT.* Soit $\varphi \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer son laplacien Δf.

Probabilités

1232. *CCINP.* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs $p_1 \in]0, 1[$ et $p_2 \in]0, 1[$.
a) Donner loi et espérance de la variable $\min(X, Y)$.
b) Donner loi et espérance de la variable $\max(X, Y)$.

1233. *CCINP.* On lance indéfiniment une pièce faisant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y) le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier (resp. du deuxième) Pile. Déterminer les lois et les séries génératrices de X et Y.

1234. *CCINP.* Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$ et que Y suit la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$.
On définit la variable aléatoire Z par $\forall\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases}$.
Déterminer la loi de Z et son espérance.

1235. *CCINP.* Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit les événements A : « X est pair » et B : « X est un multiple de 3 ». Calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

1236. *CCINP.* Une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie la condition (C) si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X \geqslant n) > 0$.
Pour une telle variable aléatoire, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \mathbf{P}(X = n | X \geqslant n)$.
La suite (x_n) est le taux de défaillance de X.
a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{\mathbf{P}(X = n)}{\mathbf{P}(X \geqslant n)}$ et $1 - x_n = \dfrac{\mathbf{P}(X \geqslant n+1)}{\mathbf{P}(X \geqslant n)}$.

b) Dans cette question, Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi donnée par $\mathbf{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

i) Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

ii) Montrer que Y vérifie (C) et calculer le taux de défaillance (y_n) associé. La série $\sum y_n$ converge-t-elle ?

c) i) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, 1[$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k) = \mathbf{P}(X \geqslant n)$.

ii) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n)$ en fonction des termes de la suite (x_k).

iii) Soit $p \in]0, 1[$. Montrer que X suit la loi géométrique de paramètre p si et seulement si la suite (x_n) est constante égale à p.

d) Déterminer la nature de la série $\sum \ln(1 - x_n)$. Que dire de $\sum x_n$?

e) Soit (z_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in [0, 1[$ et la série $\sum z_n$ diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont (z_n) est le taux de défaillance.