RMS 2022 [1189]

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on suppose que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_n)$ et on pose

$$\bar{p}_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

❧ *Démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \bar{p}_n\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$. ❧ *On suppose que $\bar{p}_n$ tend vers p lorsque n tend vers $+\infty$. Démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

❧ Une variable aléatoire de Bernoulli admet un moment d'ordre deux. Comme l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre deux est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de variables aléatoires de Bernoulli, et en particulier la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n},$$

admet aussi un moment d'ordre deux. On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

✍ ***Variante***

Comme les variables aléatoires de Bernoulli ne prennent que les valeurs 0 et 1, on sait que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad 0 \leqslant Y_n(\omega) \leqslant 1.$$

En tant que variable aléatoire bornée, Y_n admet des moments de tous les ordres et en particulier un moment d'ordre deux.

► Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = \bar{p}_n.$$

Comme les X_k sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k).$$

On doit savoir que

$$\forall\, 0 \leqslant p \leqslant 1, \quad 0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \mathbf{V}(Y_n) \leqslant \frac{1}{4n}.$$

► D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\big(|Y_n - \mathbf{E}(Y_n)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

et donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

On déduit de cet encadrement que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \bar{p}_n\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\eta = \varepsilon/2 > 0$.

► Comme $\bar{p}_n$ tend vers p et que $\eta > 0$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad |\bar{p}_n - p| \leqslant \eta.$$

► D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \big|Y_n(\omega) - p\big| \leqslant \big|Y_n(\omega) - \bar{p}_n\big| + |\bar{p}_n - p|$$

et en particulier

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \big|Y_n(\omega) - p\big| \leqslant \big|Y_n(\omega) - \bar{p}_n\big| + \eta.$$

Par conséquent, pour $n \geqslant n_0$, si

$$\big|Y_n(\omega) - p\big| \geqslant \varepsilon,$$

alors

$$\big|Y_n(\omega) - \bar{p}_n\big| + \eta \geqslant \varepsilon$$

et donc

$$\big|Y_n(\omega) - \bar{p}_n\big| \geqslant \varepsilon - \eta = \eta.$$

Autrement dit, en termes d'événements de la tribu $\mathcal{A}$,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad \big[\big|Y_n - p\big| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[\big|Y_n - \bar{p}_n\big| \geqslant \eta\big]$$

et donc, par croissance de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}\Big(\big|Y_n - p\big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\big|Y_n - \bar{p}_n\big| \geqslant \eta\Big).$$

► Comme $\eta > 0$, on déduit de la première question que le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$