RMS 2022 [1231]

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $(x,y) \in U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$f(x,y) = \varphi(y/x).$$

❧ *Démontrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.* ❧ *Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.* ❧ *Calculer le laplacien de f.* ❧ *On suppose que f est harmonique sur U (soit $\Delta f(M) = 0$ pour tout $M \in U$). Que dire de φ ?*

❧ L'ensemble U est le complémentaire de la droite vectorielle $[x = 0]$. Un sous-espace de dimension finie est toujours fermé, donc U est ouvert (en tant que complémentaire d'une partie fermée).

✍ ***Variantes***

❧ *Si une suite $u_n = (x_n, y_n)$ de points dans U^c converge vers un point $\ell = (\ell_x, \ell_y)$, alors en particulier y_n converge vers ℓ_y. Or $y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par définition de U^c), donc $\ell_y = 0$ et par conséquent $\ell \in U^c$. Ainsi, la partie U^c est fermée (car stable par passage à la limite) et son complémentaire U est donc ouvert.*

❧ *On peut aussi interpréter U comme l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par l'application*

$$\pi = [(x,y) \mapsto x] \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est ouvert (en tant qu'union de deux ouverts de $\mathbb{R}$) et l'application π est continue (application linéaire définie sur un espace de dimension finie), donc U est ouvert (image réciproque d'un ouvert par une application continue).

Autre variante

On peut aussi représenter graphiquement U (c'est le complémentaire de l'axe des ordonnées) et constater l'évidence : on voit bien *que U est un voisinage de chacun de ses points (à montrer sur la figure !).*

❧ Analysons la définition de f :

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y/x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

la fonction f est la composée d'une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert U par la fonction φ : c'est donc la composée d'une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ par une application de classe $\mathscr{C}^2$, donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

❧ On applique la formule de dérivation des fonctions composées.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{y^2}{x^4} \cdot \varphi''\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \varphi''\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

et par conséquent

$$\Delta f(x,y) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = \frac{2y}{x^3} \cdot \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{x^2+y^2}{x^4} \cdot \varphi''\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

pour tout $M = (x,y) \in U$.

✍ *La règle de la chaîne est inutile ici, car la fonction φ est une fonction d'une seule variable réelle.*

❧ Sur U, on a toujours $x \neq 0$, donc f est harmonique si, et seulement si,

$$\forall\, (x,y) \in U, \quad x^2 \Delta f(x,y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(x,y)\in U,\quad \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\cdot f''\left(\frac{y}{x}\right)+2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

Comme l'application $(x,y)\mapsto {}^y/_x$ est surjective de U dans $\mathbb{R}$, on en déduit que f est harmonique sur U si, et seulement si,

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad (1+t^2)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=0. \tag{E}$$

Il s'agit en fait d'une équation du premier ordre en φ', donc sa résolution se fait en deux étapes.

L'application φ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\,t\in\mathbb{R},\quad \varphi(t)=K_1+K_2\operatorname{Arctan} t.$$

Par conséquent, la fonction $f(x,y)=\varphi({}^y/_x)$ est harmonique sur U si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\,(x,y)\in U,\quad f(x,y)=K_1+K_2\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}.$$