RMS 2022 [1163]

> *On considère une suite positive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et la suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la donnée de* $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *et la relation de récurrence suivante :*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}.$$
>
> ❧ *Démontrer que*
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}.$$
>
> ❧ *Démontrer que : si la série* $\sum a_n$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
> ❧ *La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer la suite de terme général*
>
> $$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

❧ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2} \iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \leqslant a_n$$
$$\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leqslant u_n + a_n.$$

Or les a_n sont positifs (par hypothèse) et les u_n aussi (par hypothèse pour u_0 et par récurrence pour $n \geqslant 1$), donc

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leqslant u_n + a_n \iff u_n^2 + a_n^2 \leqslant (u_n + a_n)^2 = u_n^2 + a_n^2 + 2u_n a_n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}.$$

❧ Pour appliquer le théorème de comparaison aux séries $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum a_n$, il faut encore vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n.$$

Or, d'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n}{2}.$$

Il est clair que
$$u_n^2 + a_n^2 \geqslant u_n^2 \geqslant 0$$
et comme $u_n \geqslant 0$, on en déduit que

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \geqslant |u_n| = u_n.$$

On a donc en fait
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries **de terme général positif** que la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

❧ D'après la relation de récurrence,

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} = 2u_{n+1} - u_n$$

et donc
$$a_n^2 = (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1} - u_n).$$

En prenant $u_n = \frac{n}{n+1}$, on a alors

$$a_n^2 = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}.$$

Comme les a_n sont positifs, on en déduit que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries **de terme général positif** (bis), la série $\sum a_n$ est divergente (puisque la série harmonique est divergente).

La réciproque de la propriété établie plus haut est donc fausse.