❧ Les sous-espaces E_1, E_2 et E_3 définissent une décomposition en somme directe de E si, et seulement si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique triplet

$$(u, v, w) \in E_1 \times E_2 \times E_3$$

tel que

$$x = u + v + w.$$

Or, par construction, on connaît un vecteur directeur de E_2 (et donc une base de E_2), un vecteur directeur de E_3 (même remarque) et une famille génératrice de E_1. Comme les deux vecteurs qui engendrent E_1 ne sont pas proportionnels, ils sont linéairement indépendants et forment donc une base de E_1. Par conséquent, les trois sous-espaces vectoriels définissent une décomposition de E en somme directe si, et seulement si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$x = \underbrace{\alpha \cdot (1,0,1,0) + \beta \cdot (1,0,-1,0)}_{=u} + \underbrace{\gamma \cdot (0,1,0,3)}_{=v} + \underbrace{\delta \cdot (1,2,1,1)}_{=w}.$$

Cela revient à dire que les quatre vecteurs

$$(1,0,1,0), \quad (1,0,-1,0), \quad (0,1,0,3), \quad (1,2,1,1)$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$ ou encore que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Comme les opérations de pivot conservent le rang,

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 4$$

en effectuant d'abord $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1 - 2C_3$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$.

On a ainsi démontré que les trois sous-espaces vectoriels définissaient bien une décomposition de E en somme directe.

❧ En particulier, il existe trois projections p_1, p_2 et p_3 associées à cette décomposition au sens où

$$\forall\, x \in E, \quad x = \underbrace{p_1(x)}_{\in E_1} + \underbrace{p_2(x)}_{\in E_2} + \underbrace{p_3(x)}_{\in E_3}.$$

Comme les sous-espaces sont en somme directe, la décomposition du vecteur x est unique, donc

$$\begin{aligned} p_1(x) &= u = \alpha \cdot (1,0,1,0) + \beta \cdot (1,0,-1,0), \\ p_2(x) &= v = \gamma \cdot (0,1,0,3), \\ p_3(x) &= w = \delta \cdot (1,2,1,1). \end{aligned}$$

Pour exprimer les projections p_1, p_2 et p_3, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = x_1 \\ \gamma + 2\delta = x_2 \\ \alpha - \beta + \delta = x_3 \\ 3\gamma + \delta = x_4 \end{cases}$$

d'inconnues α, β, γ et δ, c'est-à-dire inverser la matrice P.

REMARQUE.— Il n'était pas nécessaire d'inverser P pour prouver que les trois sous-espaces vectoriels définissaient une décomposition de E en somme directe. Il ne suffit pas de justifier que P est inversible quand on cherche à exprimer les projections associées à la décomposition en somme directe. Il est donc important de bien formuler le problème à résoudre avant de se lancer dans les calculs...

On arrive après quelques efforts à

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc à

$$\alpha = \frac{5x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_4}{10}, \quad \beta = \frac{5x_1 - 5x_3}{10},$$
$$\gamma = \frac{-x_2 + 2x_4}{5}, \quad \delta = \frac{3x_2 - x_4}{5}$$

et enfin à

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{5x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_4}{10} \cdot (1,0,1,0) + \frac{5x_1 - 5x_3}{10} \cdot (1,0,-1,0) \\ &= \frac{5x_1 - 3x_2 + x_4}{5} \cdot (1,0,0,0) + \frac{3x_2 + 5x_3 + x_4}{5} \cdot (0,0,1,0) \\ p_2(x) &= \frac{-x_2 + 2x_4}{5} \cdot (0,1,0,3) \\ p_3(x) &= \frac{3x_2 - x_4}{5} \cdot (1,2,1,1). \end{aligned}$$

La matrice de p_1 relative à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc bien la matrice P_1.

REMARQUE.— (Spécial paresseux) Du fait que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, on pouvait se contenter de calculer

$$P_1 X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 + x_4 \\ 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(calcul matriciel sans difficulté) ; de vérifier ensuite que

$$\frac{5x_1 - 3x_2 + x_4}{5} \cdot (1,0,0,0) + \frac{3x_2 + 5x_3 + x_4}{5} \cdot (0,0,1,0) \in E_1 \quad \text{(facile)}$$

$$\frac{-x_2 + 2x_4}{5} \cdot (0,1,0,3) \in E_2$$

(évident)

$$\frac{3x_2 - x_4}{5} \cdot (1,2,1,1) \in E_3$$

(évident)

et de vérifier enfin que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 + x_4 \\ 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x_2 + 2x_4}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3x_2 - x_4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(pas drôle à cause des fractions, mais sans vraie difficulté) pour conclure que les expressions de l'énoncé donnait *une* décomposition de x dans la somme directe $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Comme cette décomposition est *unique* (somme directe !), on peut en déduire que cette décomposition est *la* décomposition cherchée et qu'il s'agit donc des trois projections cherchées.

(C'est toujours plus facile quand la réponse est donnée dans l'énoncé !)