RMS 2022 [498]

> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *On considère l'application* $f_A : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par*
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f_A(M) = AM.$$
> *Démontrer que* A *et* f_A *ont même spectre.*

❧ Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors

$$AX = \lambda X$$

donc la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

n'est pas la matrice nulle (puisque X n'est pas la colonne nulle) et

$$f_A(M) = AM = \begin{pmatrix} AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda M$$

donc M est un vecteur propre de f_A associé à λ.

REMARQUE.— Les matrices

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix}$$

forment une famille libre de n vecteurs propres de f_A associés à λ. Si la matrice A est diagonalisable, alors on peut définir une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A et en déduire une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de f_A : cela prouve que f_A est diagonalisable.

❧ Réciproquement, s'il existe une matrice carrée

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \neq 0_n$$

telle que

$$f_A(M) = \lambda M,$$

alors

$$\begin{pmatrix} AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_n \end{pmatrix} = AM = \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda C_1 & \lambda C_2 & \cdots & \lambda C_n \end{pmatrix}.$$

Comme $M \neq 0_n$, il existe au moins une colonne C_j *non nulle* et comme

$$AC_j = \lambda C_j,$$

on en déduit que λ est aussi une valeur propre de A.