RMS 2022 [488]

> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^4 = A^2$. ❧ *On suppose que* $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\pm 1\}$. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?* ❧ *On suppose que* $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}(A)$. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

❧ On connaît un polynôme annulateur de A et il est scindé :

$$X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1).$$

La matrice A est donc trigonalisable. Comme notre polynôme annulateur possède une racine double, rien ne prouve pour le moment que la matrice A soit diagonalisable. On sait cependant que le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur connu :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

❧ Si $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}(A)$, alors en fait

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\pm 1\}$$

et en particulier A est inversible. Par conséquent, il reste $A^2 = I_n$ et A admet $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme annulateur est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

REMARQUE.— Dans ce cas, le polynôme $(X-1)(X+1)$ est en fait le polynôme minimal de A.

❧ Dans un second temps, on a

$$\{\pm 1\} \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \pm 1\}.$$

► Si $n = 2$, alors A possède au plus deux valeurs propres distinctes, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{\pm 1\}$ et, pour les mêmes raisons que précédemment, la matrice A est diagonalisable.

► Si $n = 3$ et si $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \pm 1\}$, alors A est une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable (et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles).

► Si $n = 3$ et si $\mathrm{Sp}(A) = \{\pm 1\}$, alors A est inversible et, comme plus haut, elle est donc diagonalisable.

► Si $n = 4$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$$

vérifie bien $A^4 = A^2$ mais

$$A(A - I_4)(A + I_4) = A^3 - A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4,$$

donc son polynôme minimal est $X^2(X-1)(X+1)$, ce qui prouve que A n'est pas diagonalisable.

REMARQUE.— On aurait pu aussi observer que le noyau de A était une droite et que, par conséquent, la somme des dimensions des sous-espaces propres était égale à 3 (et pas à 4) pour conclure.