RMS 2022 [467]

> *On note* D, *l'opérateur de dérivation sur l'espace* $\mathrm{E} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *:*
>
> $$\forall\, f \in E, \qquad D(f) = f'.$$
>
> *Démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme* $\Phi \in L(E)$ *tel que* $\Phi \circ \Phi = D$.

❧ On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un endomorphisme Φ de E tel que $\Phi^2 = D$.

❧ On considère le vecteur $f = [x \mapsto e^{-x}] \in E$ et on pose alors

$$g = \Phi(f) \in E.$$

Ce vecteur g n'est pas nul, car

$$\Phi(g) = \Phi \circ \Phi(f) = D(f) = -f \neq 0_E.$$

Le vecteur g est donc un vecteur propre de D associé à la valeur propre -1 :

$$D(g) = (\Phi \circ \Phi) \circ \Phi(f) = \Phi\big[(\Phi \circ \Phi)(f)\big] = \Phi[D(f)] = -\Phi(f) = -g$$

par linéarité de Φ.

❧ Mais chercher les vecteurs propres de D associés à la valeur propre -1 :

$$D(y) = (-1) \cdot y$$

équivaut à résoudre l'équation différentielle $y' = -y$.

Les solutions de cette équation différentielle constituent la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot f$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda \cdot f$.

❧ Par linéarité de Φ, on en déduit que

$$\Phi(g) = \lambda \cdot \Phi(f) = \lambda \cdot g.$$

Mais, par définition de g,

$$\Phi(g) = (\Phi \circ \Phi)(f) = D(f) = -f,$$

donc

$$f = -\lambda \cdot g = -\lambda \cdot (\lambda \cdot f) = -\lambda^2 \cdot f.$$

Comme $f \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible puisque $\lambda \in \mathbb{R}$.

CQFD