RMS 2022 [466]

> ❧ *Démontrer que, pour toute matrice* $M \in GL_n(\mathbb{K})$*, il existe un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*
> $$M^{-1} = P(M).$$
> ❧ *Existe-t-il un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*
> $$M^{-1} = P(M)$$
> *pour toute matrice* $M \in GL_n(\mathbb{K})$ *?*

❧ Toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme minimal $P_0 \in \mathbb{K}[X]$. Or les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres et M est inversible, donc 0 n'est pas racine du polynôme minimal. Ainsi, le coefficient constant du polynôme minimal n'est pas nul :

$$P_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0.$$

Comme P_0 est un polynôme annulateur de M, on en déduit que

$$M^d + a_{d-1}M^{d-1} + \cdots + a_1 M + a_0 I_n = 0_n$$

et donc que

$$M\Big(M^{d-1} + a_{d-1}M^{d-2} + \cdots + a_2 M + a_1 I_n\Big) = -a_0 I_n,$$

ce qui prouve que le polynôme

$$P = \frac{-1}{a_0}\Big(X^{d-1} + a_{d-1}X^{d-2} + \cdots + a_2 X + a_1\Big)$$

vérifie $M^{-1} = P(M)$.

❧ Le polynôme P qu'on vient d'exhiber dépend de la matrice M.

S'il existait un polynôme P indépendant de la matrice M (entre les deux questions, seule la position des quantificateurs est modifiée), alors il faudrait en particulier que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda I_n) = \frac{1}{\lambda} I_n$$

et donc que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad P(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la propriété précédente est impossible (limite à l'origine ou à l'infini !). Il n'existe donc pas de polynôme universel !

► Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \lambda^{-1} = \lambda$$

et le polynôme $P = X$ vérifie la condition nécessaire.

Il y a $16 = 2^4$ matrices dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, parmi lesquelles six sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que ces six matrices vérifient $A^2 = I_2$, c'est-à-dire $A^{-1} = A$. Autrement dit, le polynôme X convient pour toutes les matrices de $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

► Ce n'est pas vrai dans $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ puisque les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont distinctes.

NB : Cela prouve que le polynôme X n'est pas universel, cela ne prouve pas qu'il n'existe pas de polynôme universel !

► Quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et le nombre premier p, l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne contient que p^{n^2} matrices, donc le groupe $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est fini.

En parcourant l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on n'a donc qu'un nombre *fini* de polynômes minimaux.

Le ppcm de ces polynômes est donc un polynôme annulateur commun à toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et le raisonnement de la première question permet d'en déduire qu'il existe un polynôme universel P tel que

$$\forall\, M \in GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad P(M) = M^{-1}.$$