RMS 2022 [464]

> *Soient E, un espace vectoriel et $\mathcal{A}$, une sous-algèbre de $L(E)$. On suppose que les seuls sous-espaces vectoriels de E qui sont stables par* tous *les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0_E\}$ et E.*
> *Démontrer que, quels que soient les vecteurs $x \neq 0$ et y dans E, il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.*

❧ Il est clair que l'ensemble

$$F = \big\{u(x),\ u \in \mathcal{A}\big\}$$

est contenu dans l'espace vectoriel E.

❧ Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$, alors l'application nulle ω_E appartient à $\mathcal{A}$ et par conséquent

$$0_E = \omega_E(x) \in F.$$

Quels que soient le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et les vecteurs a et b dans F, il existe deux endomorphismes u et v dans $\mathcal{A}$ tels que

$$a = u(x) \qquad \text{et} \qquad b = v(x).$$

Par conséquent,

$$\lambda a + b = (\lambda u + v)(x).$$

Or $\lambda u + v \in \mathcal{A}$ (une algèbre est stable par combinaison linéaire), donc

$$\lambda a + b \in F.$$

Ainsi, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E.

❧ Une algèbre est, par définition, unitaire, donc $I_E \in \mathcal{A}$ et donc

$$x = I_E(x) \in F.$$

Comme $x \neq 0_E$ par hypothèse, le sous-espace F n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

❧ Soit $a \in F$: il existe donc $v \in \mathcal{A}$ tel que $a = v(x)$.

Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la composée $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ (stable par $\circ$, qui est la multiplication interne), donc

$$u(a) = (u \circ v)(x) \in F.$$

Le sous-espace F est donc stable par $\mathcal{A}$. Comme il n'est pas réduit à $\{0_E\}$, il est par hypothèse égal à E.

❧ Pour tout $y \in E$, on a donc $y \in F$ et, par construction de F, il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.