RMS 2022 [656]

> *Soit* X, *une variable aléatoire réelle à valeurs dans* $[a, b]$. *Démontrer que*
> $$\mathbf{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

❧ Comme X est bornée, elle admet un moment d'ordre deux et donc une variance.

❧ Si $\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = b) = 1/2$, alors $\mathbf{E}(X) = (a + b)/2$ et

$$\mathbf{V}(X) = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

La majorant indiqué est donc la variance de la variable aléatoire qui prend les valeurs extrêmes avec équiprobabilité.

❧ La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[a, b]$ si, et seulement si, la variable aléatoire

$$X - \frac{a+b}{2}$$

prend ses valeurs dans le segment $[-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha = \frac{b-a}{2}$. De plus,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\Big(X - \frac{a+b}{2}\Big).$$

Pour résoudre le problème posé, on peut donc supposer que X prend ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$.

❧ Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$, alors il existe une variable aléatoire Y, indépendante de X et de même loi que $-X$. Par symétrie du segment, Y prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(-X) = \mathbf{V}(X).$$

La combinaison convexe

$$Z = \frac{X+Y}{2}$$

prend aussi ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et, par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{V}(Z) = \frac{\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)}{2} = \mathbf{V}(X).$$

En outre, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)}{2} = \frac{\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)}{2} = 0.$$

On peut donc se restreindre aux variables aléatoires à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ qui sont *centrées* pour majorer la variance.

❧ Comme X est centrée et prend ses valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \big(X(\omega) - \mathbf{E}(X)\big)^2 = X^2(\omega) \leqslant \alpha^2$$

et par conséquent

$$\mathbf{V}(X) \leqslant \alpha^2 = \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2.$$