RMS 2022 [655]

> *Soient* X *et* Y*, deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, strictement positives. On suppose que* X *et* $1/X$ *sont des variables aléatoires d'espérance finie. Démontrer que* X/Y *est une variable aléatoire d'espérance finie et que*
>
> $$\mathbf{E}(X/Y) \geqslant 1.$$

❧ Comme Y est strictement positive, le quotient X/Y est une variable aléatoire réelle.

Comme X et Y ont même loi, les variables aléatoires $\sqrt{Y}$ et $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ admettent des moments d'ordre deux et on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$1 = \mathbf{E}(1)^2 = \mathbf{E}\left(\sqrt{Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}}\right)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Comme X et Y ont même loi, on en déduit que

$$1 \leqslant \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

Comme X et $1/Y$ sont indépendantes et d'espérance finie, le produit $X \cdot \frac{1}{Y}$ est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}\left(\frac{1}{Y}\right) \geqslant 1.$$