RMS 2022 [654]

> *Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement les lois géométriques $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Calculer l'espérance de $U = \min\{X_1, X_2\}$ et de $V = \max\{X_1, X_2\}$.*

❧ Comme de coutume, on notera $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.
❧ Il est clair que U et V sont des applications de Ω dans $\mathbb{N}$.
❧ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, par définition du minimum,

$$[U > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k] \in \mathcal{A}.$$

► On en déduit que

$$[U = 0] = [U > 0]^c \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 1, \quad [U = k] = [U > k-1] \cap [U > k]^c \in \mathcal{A}$$

et donc que U est bien une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
► Par indépendance de X_1 et X_2,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(U > k) = \mathbf{P}(X_1 > k)\,\mathbf{P}(X_2 > k) = (q_1 q_2)^k$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U > k-1) - \mathbf{P}(U > k) = (q_1 q_2)^{k-1}\big[1 - q_1 q_2\big],$$

ce qui montre que U suit la loi géométrique de paramètre

$$p_0 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2.$$

(Il n'est pas nécessaire de s'assurer que $\mathbf{P}(U = 0) = 0$.)
❧ Par définition du maximum,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad [V \leqslant k] = [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k].$$

► Comme plus haut, on en déduit que V est bien une variable aléatoire :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad [V = k] \in \mathcal{A}.$$

► De même, par indépendance de X_1 et X_2,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(V \leqslant k) = (1 - q_1^k)(1 - q_2^k)$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(V = k) &= \mathbf{P}(V \leqslant k) - \mathbf{P}(V \leqslant k-1) \\ &= q_1^{k-1} p_1 + q_2^{k-1} p_2 - (q_1 q_2)^{k-1}(1 - q_1 q_2).\end{aligned}$$