# RMS 2022 [670]

*Soit* $(X_k)_{k\geqslant 1}$, *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :*

$$\forall\, k \geqslant 1,\quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

*Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on pose* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
❧ *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+,\quad \mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant \exp(nt^2/2).$$

❧ *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, a \in \mathbb{R}_+^*,\quad \mathbf{E}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp(-a^2/2n).$$

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont bornées et sont donc d'espérance finie.

❧ Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme les variables aléatoires $X_k$ sont indépendantes et de même loi,

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) = \big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n.$$

D'après la loi de $X$,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On vérifie sans peine (par récurrence) que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad 2^k.k! \geqslant (2k)!.$$

On en déduit que

$$\operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^k}{2^k.k!} = \exp(t^2/2)$$

et donc que

$$\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant \exp(nt^2/2).$$

❧ Comme la loi des $X_k$ est symétrique :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \{\pm 1\},\quad \mathbf{P}(X_k = x) = \mathbf{P}(X_k = -x) = \frac{1}{2}$$

et que les $X_k$ sont indépendantes, alors

$$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{\text{loi}}{=} (-X_1, \dots, -X_n).$$

Par conséquent,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{k=1}^{n} (-X_k) = -S_n.$$

On en déduit que, pour tout $a > 0$,

$$\mathbf{P}(-S_n \geqslant a) = \mathbf{P}(S_n \geqslant a)$$

et donc que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) = \mathbf{P}(S_n \geqslant a) + \mathbf{P}(S_n \leqslant -a) = 2\,\mathbf{P}(S_n \geqslant a).$$

❧ Pour tout $t > 0$, la fonction $[u \mapsto e^{tu}]$ est strictement croissante, donc

$$[S_n \geqslant a] = [e^{tS_n} \geqslant e^{ta}].$$

Comme $e^{tS_n}$ est une variable aléatoire positive d'espérance finie, l'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbf{P}(e^{tS_n} \geqslant e^{ta}) \leqslant e^{-ta}\,\mathbf{E}(e^{tS_n})$$

et on déduit de la première inégalité que

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2e^{-ta}e^{nt^2/2}.$$

❧ On remarque alors que le membre de gauche est indépendant de $t > 0$ : on peut donc passer à la borne inférieur selon le paramètre $t$.

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant \inf_{t>0} 2e^{-ta}e^{nt^2/2}.$$

Pour cela, on étudie les variations de

$$f(t) = -at + \frac{nt^2}{2}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ : il s'agit d'un trinôme du second degré, qui atteint son minimum pour $t = {}^{a}\!/_{n} > 0$ et ce minimum est égal à $f({}^{a}\!/_{n}) = \frac{-a^2}{2n^2}$. Par croissance de exp, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, a > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\frac{-a^2}{2n^2}.$$