RMS 2022 [661-669]

Soit X, une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre deux. On suppose aussi que X n'est pas presque sûrement nulle.

❧ *Démontrer que*

$$\forall\, \lambda > 0,\ \forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant \lambda\ \mathbf{E}(X) + X(\omega)\, \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]}.$$

❧ *Démontrer que, pour tout $0 < \lambda < 1$,*

$$\mathbf{P}\big(X \leqslant \lambda\ \mathbf{E}(X)\big) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2 \cdot \mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

✍ *L'intérêt de cet exercice est de présenter une variante de l'inégalité de Markov.*

❧ Comme X est positive et admet un moment d'ordre deux, alors elle est d'espérance finie et $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.

De plus, $\mathbf{P}(X = 0) < 1$ par hypothèse, donc $\mathbf{E}(X) > 0$ et (même raisonnement pour X^2) $\mathbf{E}(X^2) > 0$.

Comme $\lambda > 0$, on en déduit que le seuil $\lambda\, \mathbf{E}(X)$ est strictement positif.

❧ Pour tout $\omega \in \Omega$, on distingue deux cas :

▶ Si $X(\omega) < \lambda\, \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} = 0$ et donc

$$X(\omega) < \lambda\, \mathbf{E}(X) = \lambda\, \mathbf{E}(X) + X(\omega)\mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]}.$$

▶ Si au contraire $X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} = 1$ et donc

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} \\ &\leqslant X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]} + \lambda\, \mathbf{E}(X) \qquad \text{car } \lambda\, \mathbf{E}(X) > 0. \end{aligned}$$

▶ Dans tous les cas, on a bien

$$X \leqslant \lambda\, \mathbf{E}(X) + X\mathbb{1}_{A_\lambda}$$

où la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{A_\lambda}$ est définie par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) = \mathbb{1}_{[X(\omega) \geqslant \lambda\, \mathbf{E}(X)]}.$$

❧ D'après cette inégalité,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}(\omega) \geqslant X(\omega) - \lambda\, \mathbf{E}(X).$$

L'espérance est linéaire et conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda}) \geqslant \mathbf{E}(X) - \lambda\, \mathbf{E}(X) = (1-\lambda) \cdot \mathbf{E}(X).$$

Or $\mathbf{E}(X) > 0$ et $0 < \lambda < 1$, donc $(1-\lambda)\, \mathbf{E}(X) > 0$ et donc

$$\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})^2 \geqslant \big[(1-\lambda) \cdot \mathbf{E}(X)\big]^2.$$

Par hypothèse, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre deux et toute variable aléatoire de Bernoulli admet également un moment d'ordre deux : on peut donc appliquer l'inégalité de Schwarz.

$$\big[\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})\big]^2 \leqslant \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_\lambda}^2) = \mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda)$$

On en déduit finalement que

$$\mathbf{E}(X^2) \cdot \mathbf{P}(A_\lambda) \geqslant \big[\mathbf{E}(X \cdot \mathbb{1}_{A_\lambda})\big]^2 \geqslant \big[(1-\lambda) \cdot \mathbf{E}(X)\big]^2.$$