RMS 2022 [668]

> *Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On procède à des tirages sans remise : après chaque tirage, on enlève de l'urne les boules qui ont un numéro supérieur à celui de la boule tirée.*
> *On note X_n, le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour vider l'urne.*
> ❧ *Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.*
> ❧ *Démontrer que*
> $$\forall\, n \geqslant 2, \quad \mathbf{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_k).$$
> ❧ *Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et en déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.*

✍ *Exercice infaisable dans le cadre du programme : il s'appuie d'une part sur la formule de l'espérance totale (une variante de la formule des probabilités totales) et d'autre part sur la propriété de Markov...*

Allons-y comme d'habitude — à la one-again.

❧ Comme on retire au moins une boule à chaque tirage et que l'urne contient initialement n boules, les valeurs de X_n sont comprises entre 1 et n. Par conséquent, X_n est bornée et donc d'espérance finie (s'il s'agit bien d'une variable aléatoire).

❧ Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule boule dans l'urne, qu'on enlève au premier tirage. Par conséquent, la variable aléatoire X_1 est constante, égale à 1, et $\mathbf{E}(X_1) = 1$.

❧ Pour $n = 2$, il y a deux boules dans l'urne.

Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $[B_1 = i]$ le fait que la première boule tirée soit la boule numérotée i et admettons que

$$\mathbf{P}(B_1 = 1) = \mathbf{P}(B_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors l'urne est vidée du premier coup : $X_2 = 1$.

► Sinon, il ne reste plus que la boule 1 et l'urne est nécessairement vidée au second coup : $X_2 = 2$.

► On en déduit que

$$[X_2 = 1] = [B_1 = 1] \quad \text{et} \quad [X_2 = 2] = [B_2 = 2]$$

donc $X_2 = B_2$ et par conséquent

$$\mathbf{E}(X_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

❧ Si l'urne contient initialement n boules, alors on dispose d'un système complet d'événements :

$$[B_1 = 1], \quad [B_1 = 2], \quad \ldots, \quad [B_1 = n]$$

qui sont tous de probabilité $1/n$. (Ces événements nous indiquent quelle est la première boule tirée.)

Comme X_n est une variable aléatoire d'espérance finie, on peut appliquer la formule de l'espérance totale :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_n | B_1 = k) \cdot \mathbf{P}(B_1 = k).$$

► Si la première boule tirée est la boule 1, alors X_n prend nécessairement la valeur 1, donc

$$\mathbf{E}(X_n | B_1 = 1) = 1.$$

► Pour $2 \leqslant k \leqslant n$, si la première boule tirée est la boule k, alors *après avoir tiré cette première boule,* on continue pour vider une urne qui contient $(k-1)$ boules. "Donc" (rires nerveux dans l'assistance qui connaît la théorie des chaînes de Markov)

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{E}(X_n | B_1 = k) = \underbrace{1}_{\text{premier tirage}} + \underbrace{\mathbf{E}(X_{k-1})}_{\text{tirages suivants}}.$$

► Bref :

$$\mathbf{E}(X_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \mathbf{E}(X_{k-1}) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(X_k).$$

❧ En posant $u_k = \mathbf{E}(X_k)$, on dispose de la relation de récurrence suivante :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k = n(u_n - 1)$$

et donc que

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \big[n(u_n - 1) + u_n \big] = 1 - \frac{n}{n+1} + u_n.$$

Ainsi

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $u_1 = 1$,

$$u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ell n\, n.$$