RMS 2022 [633]

> *Soit f, une fonction à valeurs réelles, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On note S, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + f(x)y(x) = 0.$$
>
> ❧ *Pour y_1 et y_2 dans S, on pose*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$
>
> *Que dire de w ?*
> ❧ *Démontrer que S contient des fonctions non bornées.*

❧ La fonction w est constante.

▶ Première méthode : comme y_1 et y_2 sont de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction w est dérivable et

$$w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = y_1(-fy_2) - (fy_1)y_2 \equiv 0.$$

La fonction w est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

▶ Deuxième méthode : la fonction w est un wronskien de l'équation différentielle. Sous forme résoluble du premier ordre, l'équation s'écrit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = AY(x) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque wronskien W (et en particulier pour w), il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = K.\exp[x \operatorname{tr} A].$$

Comme la trace de A est nulle, on en déduit que tous les wronskiens sont constants.

❧ Si une fonction y est de classe $\mathscr{C}^2$ et bornée, alors le produit fy est intégrable (produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée).

Si y est une solution de l'équation différentielle, alors en fait y'' est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le Théorème fondamental de l'Analyse, on en déduit que la dérivée y' tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$.

Comme la fonction y est supposée bornée, la limite de y' est nécessairement nulle.

Ainsi, si y_1 et y_2 sont deux solutions bornées, alors le wronskien w est constant et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (chaque terme est le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle). Cela prouve que w est en fait la fonction nulle et donc que y_1 et y_2 sont proportionnelles.

Or S est un plan vectoriel (ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire, linéaire et homogène du second ordre), donc il existe des vecteurs non proportionnels dans S.

Il existe donc des fonctions non bornées dans S.