RMS 2022 [636]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
❧ *Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0.$$

❧ *Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si, pour* toute *solution de l'équation différentielle $X' = AX$, l'application $[t \mapsto \|X(t)\|]$ est constante.*

❧ Supposons que la matrice A soit antisymétrique.
En choisissant une **base orthonormée** de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = (AX)^\top.X = X^\top.A^\top.X = -X^\top.A.X = -\langle\, x \,|\, Ax \,\rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, A(x+y) \,|\, x+y \,\rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$\underbrace{\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\, Ay \,|\, y \,\rangle}_{=0} + \langle\, Ax \,|\, y \,\rangle + \langle\, Ay \,|\, x \,\rangle = 0.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, y \,|\, Ax \,\rangle + \langle\, Ay \,|\, x \,\rangle = 0.$$

En choisissant à nouveau une **BON** de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que

$$0 = Y^\top.(AX) + (AY)^\top.X = Y^\top.[(A + A^\top)X] = 0.$$

Cette propriété étant vraie quelles que soient les colonnes X et Y, on peut en déduire que

$$A + A^\top = 0_n$$

c'est-à-dire que A est antisymétrique.
❧ Considérons maintenant la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \|X(t)\|^2 = \langle\, X(t) \,|\, X(t) \,\rangle$$

où X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire étant bilinéaire et symétrique, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\,\langle\, X'(t) \,|\, X(t) \,\rangle.$$

► Si X est une solution de l'équation différentielle, alors $X'(t) = A.X(t)$ et comme A est antisymétrique,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\,\langle\, AX(t) \,|\, X(t) \,\rangle = 0.$$

La dérivée de la fonction f étant identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que f est constante et par conséquent que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t.

► Réciproquement, si f est constante pour chaque solution de l'équation différentielle, alors en particulier, quelle que soit la condition initiale $(t = 0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$0 = f'(0) = 2\,\langle\, AX(0) \,|\, X(0) \,\rangle = 2\,\langle\, Ax_0 \,|\, x_0 \,\rangle.$$

D'après le lemme initial, on en déduit que la matrice A est antisymétrique.

✍ *On peut aussi remarquer que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire*

$$X(t) = \exp(tA).x_0$$

et donc, dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|X(t)\|^2 &= x_0^\top.[\exp(tA)]^\top.\exp(tA).x_0 \\ &= x_0^\top.\exp(tA^\top).\exp(tA).x_0 \\ &= x_0^\top.\exp(-tA).\exp(tA).x_0 = x_0^\top.x_0 = \|X(0)\|^2\end{aligned}$$

puisque $\exp(-M) = [\exp(M)]^{-1}$ *pour toute matrice* M.