# RMS 2022 [522]

> *Soient* $E = \mathbb{C}[X]$ *et* $Q \in E$, *un polynôme distinct du polynôme nul. Pour tout* $P \in E$, *on pose*
> $$N_Q(P) = \sup_{t \in [-1,1]} \left|P(t)Q(t)\right|.$$
> $\boxed{1}$❧ *Démontrer que* $N_Q$ *est une norme sur* $E$.
> $\boxed{2}$❧ *Les normes* $N_Q$ *et* $N_1$ *sont-elles équivalentes ?*
> *NB : La norme* $N_1$ *désigne ici la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *sur* $[-1,1]$ *(ce qui revient à choisir* $Q = 1$ *dans la norme* $N_Q$*).*

$\boxed{1}$❧ Comme le produit $PQ$ peut être considéré comme une application continue sur le compact $[-1,1]$, il est clair que l'application $N_Q$ est bien définie sur $E$ ; qu'elle prend des valeurs positives ; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Enfin, si $N_Q(P) = 0$, alors $PQ = 0$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme) et comme $\mathbb{C}[X]$ est un anneau sans diviseur de zéro, on en déduit que $P = 0$ : l'application $N_Q$ sépare les points et c'est donc bien une norme sur $E$.

$\boxed{2}$❧ Comme la fonction (associée à) $Q$ est continue sur le compact $[-1,1]$, elle est bornée et par conséquent

$$\forall\, P \in E, \qquad \mathbb{N}_Q(P) = \|PQ\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty \cdot \|P\|_\infty = \|Q\|_\infty \cdot N_1(P).$$

La norme $N_1$ domine donc la norme $N_Q$.

❧ Réciproquement, si $Q$ n'a pas de racines sur le segment $[-1,1]$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [-1,1], \qquad \left|Q(t)\right| \geqslant \alpha.$$

✍ *Une fonction continue sur un compact est bornée et* atteint *ses bornes : on peut donc prendre pour* $\alpha$ *le minimum de* $|Q(t)|$ *— minimum qui n'est pas nul.*

On en déduit alors que

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, t \in [-1,1], \qquad \left|P(t)Q(t)\right| \geqslant \alpha\left|P(t)\right|.$$

Comme $|P(t)|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$, il existe $t_0 \in [-1,1]$ tel que

$$\left|P(t_0)Q(t_0)\right| \geqslant \alpha\left|P(t_0)\right| = \alpha\|P\|_\infty.$$

Comme le sup est un majorant, on en déduit que

$$\alpha\|P\|_\infty \leqslant \|PQ\|_\infty = N_Q(P).$$

Le facteur $\alpha$ est strictement positif et indépendant de $P$ (il ne dépend que de $Q$), donc on a bien démontré que la norme $N_Q$ dominait dans ce cas la norme $N_1$.

Ainsi, si $Q$ n'a pas de racine dans $[-1,1]$, les normes $N_1$ et $N_Q$ sont équivalentes.

❧ Supposons maintenant que $Q$ admette au moins une racine $\omega \in [-1,1]$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, les normes $N_1$ et $N_Q$ ne sont pas équivalentes en établissant qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_1(P_n) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_Q(P_n) = 0.$$

► Fixons $\varepsilon > 0$.

▷ Par continuité de $Q$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\omega - t| \leqslant \alpha \implies \left|Q(t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

▷ Il existe une fonction $f_\varepsilon$ continue sur $[-1,1]$ telle que $f_\varepsilon(\omega) = 1$ et vérifiant aussi

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad 0 \leqslant f_\varepsilon(t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |t-\omega| \geqslant \alpha \implies f_\varepsilon(t) = 0.$$

✍ *Faites une figure ! On peut choisir une fonction $f_\varepsilon$ affine par morceaux...*

La fonction $f_\varepsilon$ est continue sur le segment $[-1,1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe donc $P_\varepsilon \in E$ tel que

$$\|P_\varepsilon - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

▷ On en déduit d'abord que

$$\begin{aligned} |t-\omega| \geqslant \alpha &\implies \big|P_\varepsilon(t)\big| = \big|P_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)\big| \\ &\implies \big|P_\varepsilon(t)\big| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

ensuite que

$$\|P_\varepsilon\|_\infty \leqslant \|P_\varepsilon - f_\varepsilon\|_\infty + \|f_\varepsilon\|_\infty \leqslant 1 + \varepsilon$$

par inégalité triangulaire (le côté classique) et enfin que

$$\begin{aligned} \big|P_\varepsilon(\omega)\big| &= \big|P_\varepsilon(\omega) - f_\varepsilon(\omega) + f_\varepsilon(\omega)\big| \\ &\geqslant \big|f_\varepsilon(\omega)\big| - \big|P_\varepsilon(\omega) - f_\varepsilon(\omega)\big| \\ &\geqslant 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire (le côté méconnu).

Cette dernière inégalité montre que $\|P_\varepsilon\|_\infty \geqslant 1 - \varepsilon$.

▷ Pour $|t-\omega| \geqslant \alpha$,

$$\big|Q(t)P_\varepsilon(t)\big| \leqslant \|Q\|_\infty \|P_\varepsilon\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty \cdot \varepsilon.$$

D'autre part, pour $|t-\omega| \leqslant \alpha$,

$$\big|Q(t)P_\varepsilon(t)\big| \leqslant \varepsilon \cdot \|P_\varepsilon\|_\infty.$$

En prenant une constante $K$ supérieure à $\|Q\|_\infty$ et à $1+\varepsilon \geqslant \|P_\varepsilon\|_\infty$, on a donc

$$N_Q(P_\varepsilon) = \|QP_\varepsilon\|_\infty \leqslant K\varepsilon.$$

► Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\varepsilon = 1/n$, si bien que $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. On a justifié l'existence d'une suite $(U_n)_{n\geqslant 2}$ de polynômes (avec $U_n = P_{1/n}$) telle que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad N_1(U_n) = \|U_n\|_\infty \geqslant 1 - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$$

et que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad N_Q(U_n) = \|QU_n\|_\infty \leqslant K\frac{1}{n}$$

(où on a choisi $K \geqslant \|Q\|_\infty$ et $K \geqslant 2 \geqslant \|U_n\|_\infty$).

► Ces encadrements prouvent que la norme $N_1$ n'est pas dominée par $N_Q$ et donc que ces normes ne sont pas équivalentes.

❧ En conclusion, la norme $N_1$ et la norme $N_Q$ sont équivalentes si, et seulement si, le polynôme $Q$ n'a pas de racine sur $[-1,1]$.