RMS 2022 [524]

> *Déterminer les nombres complexes z pour lesquels l'ensemble*
>
> $$G = \{\exp(izt),\ t \in \mathbb{R}\}$$
>
> *est un sous-groupe fermé de* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

❧ On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $[t \mapsto \exp(izt)]$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Par conséquent, son image G est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

❧ Si z a pour représentation cartésienne $a + ib$, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\exp(izt)| = \exp(-bt).$$

Par conséquent, si $b \neq 0$, alors $\exp(izt)$ tend vers $0 \notin G$ lorsque t tend vers $+\infty$ (pour $b > 0$) ou lorsque t tend vers $-\infty$ (pour $b < 0$). Cela contredit le fait que G est supposé fermé.

❧ Supposons réciproquement que z soit réel. Dans ce cas, l'application $\left[t \mapsto e^{izt}\right]$ est $\frac{2\pi}{z}$-périodique. De ce fait, l'ensemble G est l'image du compact $[0, \frac{2\pi}{z}]$ par une fonction continue, donc G est compact et en particulier fermé.

❧ On a donc démontré que G était fermé si, et seulement si, z était réel (c'est-à-dire $\operatorname{Im} z = 0$). Dans ce cas, G est en fait égal au cercle unité $\mathbb{U}$.