RMS 2022 [644]

> *Soit $n \geqslant 2$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à l'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.*

✍ *On rappelle que $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\det M = 1$.*

❧ On rappelle également que det est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est une application polynomiale). Déterminons l'application linéaire tangente à det en I_n : pour toute matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\det(I_n + H) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= (1 + h_{1,1}) \cdots (1 + h_{n,n}) + o(H) \qquad (\star) \\ &= 1 + \operatorname{tr} H + o(H). \qquad (\star\star)\end{aligned}$$

On rappelle avant d'aller plus loin que $h_{i,j} = \mathcal{O}(\|H\|_\infty)$ lorsque H tend vers la matrice nulle 0_n, quels que soient les indices i et j.

Lorsque $\sigma \neq I$, *au moins deux* facteurs $a_{i,\sigma(i)}$ sont situés hors de la diagonale de $I_n + H$: le produit est donc $\mathcal{O}(\|H\|_\infty^2)$ et par conséquent $o(H)$ lorsque H tend vers 0_n.

En développant le terme qui correspond à $\sigma = I$, on trouve un terme constant (égal à 1), les termes $h_{1,1}$, ..., $h_{n,n}$ et des termes qui contiennent *au moins deux* facteurs $h_{i,j}$.

Le développement limité ainsi obtenu nous dit que l'application linéaire tangente à det en I_n est l'application tr.

❧ On considère une application f définie sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ (avec $\alpha > 0$), de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall\, t \in]-\alpha, \alpha[, \quad \det f(t) = 1$$

et telle que $f(0) = I_n$.

On a donc

$$f(t) \underset{t \to 0}{=} I_n + t f'(0) + o(t)$$

et d'après le développement limité de det

$$1 = \det f(t) \underset{t \to 0}{=} 1 + t \operatorname{tr}[f'(0)] + o(t).$$

On en déduit que $\operatorname{tr}[f'(0)] = 0$. Chaque vecteur tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n est donc une matrice de trace nulle.

❧ Réciproquement, si H est une matrice de trace nulle, alors on pose :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \exp(tH).$$

Il est clair que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (ses n^2 composantes sont des séries entières dont le rayon de convergence est infini), que

$$f(0) = \exp(0_n) = I_n,$$

que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = H.\exp(tH)$$

(cours sur les équations différentielles !) et donc que $f'(0) = H$.

Enfin, toujours d'après le cours sur les équations différentielles,

$$\det[f(t)] = \exp(t \operatorname{tr} H) = \exp(0) = 1,$$

donc f est bien une fonction qui prend ses valeurs sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, H est bien un vecteur tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.