RMS 2022 [642]

> *Démontrer qu'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles*
>
> $$\forall\, M=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(M)+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(M)=0$$
>
> *si, et seulement si, il existe une fonction $g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que*
>
> $$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=g\Big(\frac{x}{1+y^2}\Big).$$

❧ Notons $U=\mathbb{R}^2$, l'ouvert sur lequel la fonction f est définie et considérons le changement de variables défini par

$$\forall\,(x,y)\in U,\quad (u,v)=\varphi(x,y)=\Big(\frac{x}{1+y^2},\ y\Big).$$

Il est clair que, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$,

$$(u,v)=\varphi(x,y)\iff (x,y)=\big(u(1+v^2),\ v\big).$$

Cela prouve que φ réalise une bijection de l'ouvert U sur l'ouvert $V=\mathbb{R}^2$. En outre, il est clair que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U (sa première composante est une fonction rationnelle sans pôle sur U, sa deuxième composante est polynomiale) et que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V (ses deux composantes sont polynomiales).

Par conséquent, la fonction $f(x,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si, et seulement si, la composée $g(u,v)=(f\circ\varphi^{-1})(u,v)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

❧ D'après la règle de la chaîne, quel que soit $M=(u,v)\in V$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(M)&=\frac{\partial f}{\partial x}[\varphi^{-1}(M)]\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(M)+\frac{\partial f}{\partial y}[\varphi^{-1}(M)]\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(M)\\&=2uv\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\\&=\frac{2xy}{1+y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

✍ *Dans les deux dernières lignes, les dérivées partielles de f sont évaluées au point de coordonnées $\varphi^{-1}(M)$; les coordonnées x et y sont considérées comme des fonctions de u et v.*

Comme φ^{-1} réalise une bijection de V sur U, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\forall\,(u,v)\in V,\quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0\\&\iff \forall\,(x,y)\in U,\quad 2xy\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(1+y^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{aligned}$$

et on rappelle que, par construction, les fonctions f et g sont liées par la relation :

$$\forall\,(x,y)\in U,\quad f(x,y)=(g\circ\varphi)(x,y).$$

❧ D'après le cours, une fonction $g(u,v)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V=\mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial g}{\partial v}=0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(u,v)\in V,\quad g(u,v)=G(u).$$

Par conséquent, une fonction $f(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2$ est solution de l'EDP

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(x, y) \in U, \quad f(x, y) = G\Big(\frac{x}{1+y^2}\Big).$$