RMS 2022 [1111]

> *Soient E, un espace vectoriel réel de dimension n et u, un endomorphisme de E ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Déterminer le nombre d'endomorphismes v tels que $v^2 = u$.*

❧ Comme u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, cet endomorphisme est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I)$$

et ses sous-espaces propres sont des droites :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I) = 1.$$

Si $v^2 = u$, alors u et v commutent (ce sont deux polynômes en v) et par conséquent, tout sous-espace propre de u est aussi stable par v. Comme les sous-espaces propres de u sont des droites, leurs vecteurs directeurs respectifs (qui sont par construction des vecteurs propres de u) sont donc des vecteurs propres de v.

Autrement dit, quelle que soit la base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres $\boxed{\text{pour } u}$ considérée,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \Delta.$$

Mais $u = v^2$, donc $D = \Delta^2$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu_k^2 = \lambda_k.$$

❧ On distingue alors les cas suivants.

► Si l'un des λ_k au moins est strictement négatif, le problème posé n'a pas de solution. (On travaille sur un espace vectoriel réel, donc les μ_k doivent être réels).

► Si tous les λ_k sont strictement positifs, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mu_k = \pm\sqrt{\lambda_k}.$$

Il y a donc 2^n choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et donc 2^n endomorphismes v tels que $v^2 = u$.

► Si l'un des λ_k est nul ($\lambda_1 = 0$ par exemple), alors les $(n-1)$ autres sont strictement positifs (puisqu'ils sont deux à deux distincts) et il y a cette fois seulement 2^{n-1} choix possibles pour la famille $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ (puisqu'on a nécessairement $\mu_1 = 0$) et donc seulement 2^{n-1} endomorphismes v tels que $v^2 = u$.