RMS 2022 [1114]

Dans un espace euclidien E, *on considère un endomorphisme* ***antisymétrique*** f :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = -\langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle.$$

1❧ *Démontrer que*

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = 0 \quad \textit{et} \quad \langle\, f^2(x) \,|\, x \,\rangle \leqslant 0.$$

2❧ *Soit* $\mathscr{B}$, *une base orthonormée de* E. *Que dire de la matrice* $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *?*

3❧ *En calculant* $\det(A^\top)$, *démontrer que : si* f *est inversible, alors la dimension de* E *est paire.*

4❧ *Démontrer que* f^2 *est diagonalisable et que son spectre est inclus dans* $\mathbb{R}_-$.

1❧ Avec $y = x$ et la symétrie du produit scalaire,

$$\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = -\langle\, x \,|\, f(x) \,\rangle = -\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle$$

donc $\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

Par antisymétrie de f,

$$\langle\, f^2(x) \,|\, x \,\rangle = \langle\, f\big(f(x)\big) \,|\, x \,\rangle = -\langle\, f(x) \,|\, f(x) \,\rangle = -\big\|f(x)\big\|^2$$

donc $\langle\, f^2(x) \,|\, x \,\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in E$.

2❧ Dans une base orthonormée de E, la propriété d'antisymétrie de f se traduit matriciellement par

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (AX)^\top.Y = -X^\top.(AY)$$

c'est-à-dire

$$X^\top.A^\top.Y = -X^\top.A.Y$$

ou encore

$$X^\top.(A^\top + A).Y = 0.$$

Cette propriété étant vérifiée pour *toutes* les matrices colonnes X et Y de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que $A^\top + A = 0_n$, c'est-à-dire

$$A^\top = -A.$$

✍ *La réciproque est vraie : si* $\mathscr{B}$ *est une base orthonormée et si la matrice* $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *est antisymétrique, alors l'endomorphisme* f *est antisymétrique.*

3❧ Le déterminant d'une matrice carrée quelconque est toujours égal au déterminant de sa transposée. Par conséquent,

$$\det A = \det A^\top = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Si f est inversible, alors $\det A \neq 0$ et par conséquent $(-1)^n = 1$. La dimension de E est donc paire.

4❧ La matrice de f^2 relative à la base $\mathscr{B}$ est égale à $A^2 = -A^\top.A$. Elle est donc symétrique réelle et comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on en déduit que f^2 est un endomorphisme symétrique. En particulier (Théorème spectral), l'endomorphisme f^2 est diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f^2 et si $x_0 \neq 0_E$ est un vecteur propre de f^2 associé à λ, alors

$$\lambda\|x_0\|^2 = \langle\, f^2(x_0) \,|\, x_0 \,\rangle \leqslant 0.$$

Or $\|x_0\|^2 > 0$ (puisque $x_0 \neq 0_E$), donc $\lambda \leqslant 0$.