RMS 2022 [527]

> *Soit* E*, l'espace vectoriel des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$ *telles que* $f(0) = f'(0) = 0$*. Pour toute fonction* $f \in E$*, on pose*
>
> $$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$
>
> **1❧** *Démontrer que* N *est une norme sur* E*.*
> **2❧** *Soit* $f \in E$*. Exprimer* f *en fonction de* $g = f + 2f' + f''$*.*
> **3❧** *Démontrer qu'il existe* $a \in \mathbb{R}_+$ *tel que*
>
> $$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant aN(f).$$
>
> **4❧** *Les normes* $\|\cdot\|_\infty$ *et* N *sont-elles équivalentes ?*

1❧ Il est clair que N est bien définie sur E (norme infinie d'une fonction continue sur un segment) ; qu'elle est positive ; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation).

Enfin, si $N(f) = 0$, alors f est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'' + 2x' + x = 0$$

qui vérifie en outre $x(0) = x'(0) = 0$, donc f est la fonction nulle (soit par un calcul explicite sachant que $f(t) = (at+b)e^{-t}$, soit en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Donc N est bien une norme sur E.

✍ *Bien entendu,* N *n'est pas une norme sur* $\mathscr{C}^2([0,1])$*.*

2❧ La fonction $f \in E$ considérée est *la* solution du problème de Cauchy :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = g(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x_H(t) = (at+b)e^{-t}$ et la méthode de variation des constantes nous donne une solution particulière :

$$x_0(t) = e^{-t}\int_0^t e^s(t-s)g(s)\,ds$$

et en même temps (puisqu'on raisonne sur le couple (x, x') en faisant varier les constantes)

$$x_0'(t) = e^{-t}\int_0^t e^s(1+s-t)g(s)\,ds.$$

✍ *On pourrait dériver et simplifier l'expression de* $x_0(t)$ *: ce n'est pas compliqué, mais c'est un peu long. L'avantage de la méthode de variation des constantes est de nous donner directement une expression* simple *de la dérivée — et de ne la donner que si nous en avons réellement besoin.*

Il apparaît que $x_0(0) = x_0'(0) = 0$, donc $f = x_0$!

3❧ On déduit de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| &\leqslant \int_0^t \underbrace{e^{s-t}(t-s)}_{\geqslant 0}\|g\|_\infty\,ds \\ &\leqslant N(f)e^{-t}\int_0^t e^s(t-s)\,ds.\end{aligned}$$

(Les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant.)

Or, pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 \leqslant e^s(t-s) \leqslant e \cdot 1$$

donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant e^{-t} \int_0^t e^s(t-s)\, ds \leqslant e.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $t \in [0,1]$, donc on peut passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leqslant e\, N(f).$$

✍ *On vient de démontrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme N.*

Mais la norme N prend en compte les variations de f (présence de f' et de f''), alors que la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne tient compte que de l'amplitude de f et pas de ses variations. Pour démontrer que les deux normes ne sont pas équivalentes, on va chercher des fonctions dont l'amplitude est limitée et dont les variations sont de plus en plus rapides.

4❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = t \sin nt.$$

Il est clair que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, que $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ et que $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$.

Mais

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) + 2f_n'(t) + f_n''(t) = [2 + (1-n^2)t] \sin nt + n(2+t) \cos nt$$

et en particulier $f_n(0) + 2f_n'(0) + f_n''(0) = 2n$, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N(f_n) \geqslant 2n.$$

Le quotient $N(f_n)/\|f_n\|_\infty$ tend vers $+\infty$, donc la norme N n'est pas dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.