RMS 2022 [652]

Soit $r > 0$. On pose

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \int_0^1 r x^{k-1}(1-x)^r \,dx.$$

$\boxed{1}$ *Démontrer que $(p_k)_{k\geqslant 1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.*
$\boxed{2}$ *Soit X, une variable aléatoire discrète telle que $\mathbf{P}(X = k) = p_k$ pour tout $k \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de r la variable X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ? Calculer $\mathbf{E}(X)$ dans ce cas.*

$\boxed{1}$ Il est clair que tous les p_k sont positifs. Il reste donc à prouver d'une part que la série $\sum p_k$ est convergente et d'autre part que la somme de cette série est égale à 1.

❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_k(x) = r x^{k-1}(1-x)^r.$$

► Il est clair que les fonctions f_k sont continues sur le segment $[0,1]$ (puisque $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$). Elles sont donc intégrables sur cet intervalle.

► La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[0,1]$ (série géométrique de raison x pour $0 \leqslant x < 1$; de terme général nul pour $x = 1$).

► La somme S_0 de cette série de fonctions est continue et intégrable sur $[0,1[$ puisque

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \quad S_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = r(1-x)^{r-1} \quad \text{et} \quad S_0(1) = 0.$$

✍ *La somme S_0 n'est continue sur $[0,1]$ que pour $r > 1$.*

► Comme les fonctions f_k sont positives, on a donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant S_0(x).$$

Le majorant est indépendant de n et intégrable sur $[0,1[$, donc la convergence est dominée.

❧ On peut donc intégrer terme à terme : la série $\sum p_k$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-1}\,dt = 1.$$

$\boxed{2}$ Pour étudier l'espérance de X, on reprend la même étude avec la série de fonctions $\sum k f_k$.

❧ Pour tout $x \in [0,1[$,

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k(x) = r(1-x)^r \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = r(1-x)^{r-2}.$$

► Si $r > 1$, alors la somme S_1 est intégrable sur $[0,1[$ et le même raisonnement que le précédent montre que la série $\sum k p_k$ est convergente (ce qui prouve que X est une variable d'espérance finie) et que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k = \int_0^1 r(1-x)^{r-2}\,dx = \frac{r}{r-1}.$$

► Si $0 < r \leqslant 1$, alors la somme S_1 n'est pas intégrable sur $[0, 1[$.

Si la série $\sum kp_k$ était convergente, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad kp_k = \int_0^1 kf_k(x)\,dx = \int_0^1 \left|kf_k(x)\right|\,dx$$

et on pourrait donc appliquer le Théorème d'intégration terme à terme à la série $\sum kf_k$. Dans ce cas, la somme S_1 serait une fonction intégrable sur $[0, 1[$, ce qui est faux.

❧ La série $\sum kp_k$ est donc convergente si, et seulement si, $r > 1$.

La variable X est donc une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, $r > 1$ et

$$\forall\, r > 1, \quad \mathbf{E}(X) = \frac{r}{r-1}.$$