RMS 2022 [1129]

1❧ *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2❧ *Démontrer que la matrice* A *est semblable à la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3❧ *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4❧ *Retrouver cette expression en décomposant* A *sous la forme* $I_3 + N$.

1❧ La première colonne de A nous montre que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$. Le rang de la matrice

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 1, donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation $[y - z = 0]$.

La trace de A est égale à 3 et c'est aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme 1 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 (= dimension du sous-espace propre), on en déduit que 1 est en fait valeur propre triple.

La multiplicité de la valeur propre 1 étant strictement supérieure à la dimension du sous-espace propre associé à 1, on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

2❧ Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}_0$. S'il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T,$$

alors le vecteur ε_3 est choisi hors de $\mathrm{Ker}(f - I)$, le vecteur ε_2 est l'image de ε_3 par $f - I$ et le vecteur ε_1 est choisi de telle sorte que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f - I)$.

Choisissons $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)$. Il faut alors $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) - \varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ et on peut choisir $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ (qui vérifie l'équation du plan $\mathrm{Ker}(f - I)$ sans être proportionnel à ε_2).

Il est clair que la matrice

$$P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui prouve que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Enfin, par construction des vecteurs ε_k, on a bien

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \qquad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, \qquad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ce qui prouve que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = T$.

Les matrices A et T sont donc bien semblables.

3❧ D'après ce qui précède, $T = P^{-1}AP$, donc $A = PTP^{-1}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n \overset{(\star)}{=} PT^nP^{-1}.$$

On vérifie facilement (récurrence, binôme...) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = nT - (n-1)I_3.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \overset{(\star)}{=} nA - (n-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & -n \\ 0 & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

✍ *On a utilisé deux fois* $(\star)$ *le fait que l'application* $\left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ *est un morphisme d'algèbres.*

$\boxed{\textbf{4}}$ On a déjà défini la matrice N. Il est clair que N est nilpotente d'indice 2 (c'est-à-dire $N \neq 0_3$ et $N^2 = 0_3$). Comme toute matrice commute à I_3, on peut appliquer la formule du binôme et en déduire que

$$A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + \binom{n}{1} N^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k = I_3 + nN.$$

✍ *Ce n'est vraiment pas très différent des calculs qui précèdent...*