RMS 2022 [535]

> *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que*
> $$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n + an + b + o(1).$$

❧ Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = n\ln n + \sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big).$$

❧ Ensuite, comme la fonction $f = [t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = 2\ln 2 - 1 > 0$$

(théorème sur les sommes de Riemann). Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) - n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} (2\ln 2 - 1)n$$

et par suite $a = 2\ln 2 - 1$.

❧ Enfin, on s'intéresse à la différence

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$$

qui peut aussi s'écrire (relation de Chasles)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\big[f(k/n) - f(t)\big]\,dt.$$

► La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f'(t) = \frac{1}{1+t}, \qquad \big|f''(t)\big| = \frac{1}{(1+t)^2} \leqslant 1.$$

Alors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout entier $0 \leqslant k < n$,

$$\forall\, t \in \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big], \quad \Big|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{k}{n} - t\Big)^2 \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

On peut alors borner chaque intégrale de la manière la plus classique qui soit : pour tout entier $0 \leqslant k < n$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\Big(f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big)\,dt\Big| \\
&\qquad\qquad \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\Big|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big|\,dt \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}$$

et par inégalité triangulaire, la quantité

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\int_0^1 \ln(1+t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\cdot\frac{t - k/n}{1+k/n}\,dt\Big|$$

est majorée par $1/2n$ (il y a n termes dans la somme).

► Il reste à calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \cdot \frac{t - {}^{k}\!/\!_{n}}{1 + {}^{k}\!/\!_{n}} \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1}{1 + {}^{k}\!/\!_{n}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + {}^{k}\!/\!_{n}}$$
$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \quad \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\ln 2}{2}.$$

❧ Finalement, on a trouvé

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) \underset{n \to +\infty}{=} n \ln n + (2 \ln 2 - 1)n - \frac{\ln 2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

(ce qui est même un peu plus précis que prévu).