RMS 2022 [1125]

> *Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que*
> $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise les notations habituelles pour les vecteurs de la base canonique :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ **Analyse**

► Si une telle matrice A existe, alors $A^4 = (A^2)^2 = 0_3$, donc A est nilpotente et son indice de nilpotence est strictement supérieur à 2. Comme l'indice de nilpotence d'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est inférieur à 3, on en déduit que l'indice de nilpotence de A est égal à 3 et donc que $A^3 = 0_3$.

En particulier, la matrice A n'est pas inversible, $\dim \operatorname{Ker} A \geqslant 1$ et

$$\mathbb{R} \cdot E_1 = \operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Ker} A$$

puisque $A^3 = A \times A^2 = 0_3$.

► On vient de remarquer que le vecteur E_1 appartient à $\operatorname{Im} A^2 \subset \operatorname{Im} A$. Par ailleurs, $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 = [z = 0]$ et $\dim \operatorname{Ker} A \leqslant 2$.

Si $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, alors $\operatorname{rg} A = 1$ (Théorème du rang) et d'après les inclusions précédentes,

$$\operatorname{Im} A = \mathbb{R} \cdot E_1 \subset [z = 0] = \operatorname{Ker} A.$$

Dans ces conditions, $A^2 = A \times A = 0_3$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Donc $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ et par conséquent

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^2 = \mathbb{R} \cdot E_1.$$

La première colonne de A, égale à AE_1, est donc la colonne nulle.

► La deuxième colonne de A^2, égale à $A^2E_2 = A(AE_2) = 0$, nous dit que AE_2 (la deuxième colonne de A) appartient au noyau de A. Elle est donc proportionnelle à E_1 : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$AE_2 = \alpha E_1$$

et comme $E_2 \notin \operatorname{Ker} A = \mathbb{R} \cdot E_1$, le scalaire α ne peut pas être nul.

► Enfin, la troisième colonne de A^2 vérifie :

$$E_1 = A^2E_3 = \frac{1}{\alpha}AE_2$$

et par conséquent

$$A\Big(AE_3 - \frac{1}{\alpha}E_2\Big) = 0.$$

Connaissant le noyau de A, on en déduit qu'il existe donc un réel β tel que

$$AE_3 - \frac{1}{\alpha}E_2 = \beta E_1.$$

Il existe donc deux réels $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ **Synthèse**
Il est clair que

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quels que soient les réels $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.