# RMS 2022 [1135]

> $\boxed{\textbf{1}}$ *Soient* $A$ *et* $B$, *deux matrices de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *(avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*). Démontrer que, si la matrice* $A$ *est inversible, alors* $AB$ *et* $BA$ *ont même polynôme caractéristique. Démontrer que cette propriété reste vraie lorsque* $A$ *n'est pas inversible.*
>
> $\boxed{\textbf{2}}$ *Soient* $f$ *et* $g$, *deux endomorphismes d'un espace vectoriel* $E$ *de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *On considère une valeur propre non nulle* $\lambda$ *de* $f \circ g$ *et on pose*
>
> $$E_\lambda = \mathrm{Ker}(f \circ g - \lambda I) \quad \textit{et} \quad F_\lambda = \mathrm{Ker}(g \circ f - \lambda I).$$
>
> *Démontrer que* $\lambda$ *est une valeur propre de* $g \circ f$, *puis que*
>
> $$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \quad \textit{et} \quad f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$
>
> *En déduire que* $\dim E_\lambda = \dim F_\lambda$.

$\boxed{\textbf{1}}$ Supposons que $A$ soit inversible.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la propriété de morphisme du déterminant,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - BA) &= \det(\lambda A^{-1} - B).\det A \\ &= \det A.\det(\lambda A^{-1} - B) = \det(\lambda I_n - AB).\end{aligned}$$

Cette égalité étant vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc ensemble *infini*), on en déduit que le polynôme caractéristique de $AB$ est égal au polynôme caractéristique de $BA$.

❧ On sait que le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (toute matrice $A$ est limite d'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles) et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les applications

$$[A \mapsto \det(\lambda I_n - AB)] \quad \text{et} \quad [A \mapsto \det(\lambda I_n - BA)]$$

sont continues (ce sont des applications polynomiales en fonction des coefficients de $A$).

Comme ces deux applications sont égales sur $GL_n(\mathbb{K})$, elles sont aussi égales sur l'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Autrement dit, quelles que soient les matrices $A$ et $B$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices $AB$ et $BA$ ont même polynôme caractéristique.

$\boxed{\textbf{2}}$ En choisissant une base $\mathscr{B}$ (quelconque !) de $E$, et en notant $A$ et $B$, les matrices qui représentent $f$ et $g$ dans la base $\mathscr{B}$, on déduit de la question précédente que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique, donc mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Comme $\lambda$ est, par définition, une valeur propre de $f \circ g$, on en déduit que $\lambda$ est aussi une valeur propre de $g \circ f$.

❧ Soit $x \in E_\lambda$. Alors $(f \circ g)(x) = \lambda x$ (par définition de $E_\lambda$). On en déduit que

$$g\big[(f \circ g)(x)\big] = \lambda g(x),$$

c'est-à-dire

$$(g \circ f)\big[g(x)\big] = \lambda \cdot g(x)$$

ou encore que $g(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(g \circ f - \lambda I) = F_\lambda$.

De la même façon, on démontre que

$$\forall\, y \in \mathrm{Ker}(g \circ f - \lambda I), \qquad f(y) \in \mathrm{Ker}(f \circ g - \lambda I).$$

❧ Si $x \in E_\lambda$ et $g(x) = 0_E$, alors

$$\lambda \cdot x = (f \circ g)(x) = f(0_E) = 0_E.$$

Comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $x = 0_E$. Autrement dit, en restriction à $E_\lambda$, l'endomorphisme $g$ est injectif et par conséquent

$$\dim g(E_\lambda) = \dim E_\lambda.$$

D'après l'inclusion précédente, $\dim E_\lambda \leqslant \dim F_\lambda$.

On démontre de la même manière que $\dim F_\lambda \leqslant \dim E_\lambda$ et donc que les deux sous-espaces propres $E_\lambda$ et $F_\lambda$ ont même dimension.

✍ *Si $A$ est inversible, alors $AB = A(BA)A^{-1}$ et cette égalité toute simple montre que $AB$ et $BA$ sont semblables. Dans ce cas, il est clair que les polynômes caractéristiques sont égaux et que les sous-espaces propres sont deux à deux isomorphes !*