# RMS 2022 [1118]

> *On pose*
> $$F(\alpha) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$
> *Déterminer les limites de* $F$ *en* $0$ *et en* $+\infty$*.*

❧ Tout d'abord, $F(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha > 0$ (somme d'une série de Riemann convergente).

❧ Comme tous les termes sont positifs,

$$\forall\, \alpha > 0, \quad F(\alpha) \geqslant \alpha \cdot \frac{1}{1^{1+\alpha}} = \alpha$$

et par comparaison, $F$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction $f$ définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{\alpha}{t^{1+\alpha}}$$

est continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Par comparaison entre une somme et une intégrale (*faites une figure !*),

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\, dt}{1 + t^{\alpha}} \leqslant F(\alpha) \leqslant \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha\, dt}{1 + t^{\alpha}}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \alpha > 0, \quad 1 \leqslant F(\alpha) \leqslant 1 + \alpha.$$

Par encadrement, on en déduit que $F$ tend vers $1$ au voisinage (droit) de $0$.