RMS 2022 [1116]

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2).$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des réels a, b et c.

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= (a+b+c) \ln n + b \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ &= (a+b+c) \ln n + \frac{b+2c}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

- Si $a+b+c \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a+b+c = 0$ et $b+2c \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{b+2c}{n}$$

et $\sum u_n$ diverge (mais pas grossièrement).
- Enfin, si $a+b+c = b+2c = 0$, alors $u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$, donc la série $\sum u_n$ converge (absolument).

✍ *Dans ce dernier cas, on a $b = -2a$ et $c = a$, donc*

$$u_n = a\left[\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\right]$$

et on reconnaît une série télescopique :

$$\forall\, N \geqslant 2, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = a\left[-\ln 2 + \ln\frac{N+2}{N+1}\right]$$

donc la somme de la série est égale à $-a \ln 2$.