RMS 2022 [1162]

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad et \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1❧ *Vérifier que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

2❧ *Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.*

3❧ *Démontrer que $u_n \sim v_n$. Conclusion ?*

1❧ Par définition,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)^{-1}$$

et comme $(-1)^n/\sqrt{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut utiliser le développement limité de $(1+x)^{-1}$ au voisinage de $x = 0$:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

pour en déduire que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \Big[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]$$

et le résultat cherché s'obtient en développant ce produit.

2❧ La série $\sum v_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : c'est une série alternée et, de façon évidente, la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

D'après le développement précédent,

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

donc la série $\sum(u_n - v_n)$ est divergente (série harmonique). Par conséquent,

$$\sum u_n = \underbrace{\sum(u_n - v_n)}_{\text{DV}} + \underbrace{\sum v_n}_{\text{CV}}$$

est divergente.

3❧ Le développement de la première question a beau nous indiquer que $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature : le théorème de comparaison par équivalence s'applique aux séries DONT LE TERME GÉNÉRAL EST DE SIGNE CONSTANT, il ne peut pas s'appliquer aux séries alternées.