RMS 2022 [1159]

1❧ *Démontrer que*

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

pour x dans un domaine D qu'on précisera.

2❧ *Démontrer que*

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot(\sqrt{2}-1)^{2n+1}.$$

1❧ Par définition, lorsque $\cos 2x \neq 0$,

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

et si de plus $\cos x \neq 0$, alors

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

Cette relation est donc vraie sur l'intervalle $]-\pi/4, \pi/4[$ et plus généralement pour tout x distinct de $\pi/4$ et de $\pi/2$ modulo π.

2❧ On reconnaît le développement en série entière de la fonction Arctan. Comme $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, il s'agit donc de démontrer que

$$\frac{\pi}{8} = \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}-1)$$

et donc de vérifier que $\tan \pi/8 = \sqrt{2}-1$. Or, d'après la question précédente,

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

donc $\tan \pi/8$ est un réel positif qui vérifie l'équation

$$y^2+2y-1=0.$$

Les racines de cette équation sont $-1\pm\sqrt{1^2-(-1)}$, donc $\tan\pi/8$ est bien égal à $\sqrt{2}-1$.