RMS 2022 [1155]

On note E*, l'espace vectoriel des applications de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0,1]$ *telles que* $f(0)=0$*. Pour toute fonction* $f \in E$*, on pose*

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \textit{et} \quad N'(f) = \|f+f'\|_\infty.$$

1❧ *Démontrer que* N *et* N' *sont des normes sur* E*.*

2❧ *Vérifier que*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t \big(f(t)+f'(t)\big)\,dt.$$

3❧ *Démontrer qu'il existe deux réels* a *et* b *strictement positifs tels que*

$$\forall\, f \in E, \quad aN'(f) \leqslant N(f) \leqslant bN(f).$$

On sait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace des fonctions bornées.

1❧ Soit $f \in E$.

► Comme f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, les trois fonctions f, f' et $(f+f')$ sont bornées, donc $N(f)$ et $N'(f)$ sont bien définies et évidemment positives.

► Par linéarité de la dérivation et par homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, les deux applications N et N' sont positivement homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire.

► Comme $0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant N(f)$, si $N(f)=0$, alors $f=0_E$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ sépare les points).

De même, si $N'(f)=0$, alors $f+f'=0_E$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)=Ke^x$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme $f(0)=0$, on en déduit que $f=0_E$.

Donc N et N' séparent les points.

❧ Donc N et N' sont deux normes sur E.

2❧ Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction

$$\big[t \mapsto e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\big]$$

est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc (Théorème fondamental) le second membre est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est égale à

$$e^x\big(f(x)+f'(x)\big) = \frac{d}{dx}\big[e^x f(x)\big]$$

pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs, les deux expressions sont nulles pour $x=0$.

Les deux expressions sont égales en un point et leurs dérivées sont égales sur l'intervalle $[0,1]$, donc les deux expressions sont égales sur tout l'intervalle :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\,dt.$$

3❧ Par inégalité triangulaire, $N'(f) \leqslant N(f)$, donc $a=1$ convient.

Réciproquement, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\big|f(x)\big| = \left|e^{-x}\int_0^x e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\,dt\right| &\leqslant e^{-x}\int_0^1 e^t\big|f(t)+f'(t)\big|\,dt \\ &\leqslant (e-1)\|f+f'\|_\infty.\end{aligned}$$

Comme le majorant est indépendant de x, on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leqslant (e-1)N'(f).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|f'\|_\infty = \|(f'+f)+(-f)\|_\infty \leqslant \|f'+f\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant eN'(f)$$

et finalement

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant (2e-1)N'(f).$$