RMS 2022 [1156]

1❧ *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation*

$$x - \ell n\, x = n$$

admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0,1]$.
2❧ *Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, puis que $x_n \sim e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
3❧ *Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.*

1❧ La fonction $f = [x \mapsto x - \ell n\, x]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1]$ et

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} < 0$$

donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0,1]$. Il est clair que f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et que $f(1) = 1$. D'après le Théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$ et la bijection réciproque est continue sur $[1,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel n appartient à $[1,+\infty[$, donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution : $x_n = f^{-1}(n) \in]0,1]$.

2❧ Comme f tend vers $+\infty$ au voisinage de 0, le Théorème de la bijection nous assure que la réciproque f^{-1} tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Par conséquent,

$$x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par définition de x_n,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ell n\, x_n = -n + x_n.$$

En composant par exp :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = e^{-n}.\underbrace{e^{x_n}}_{\to 1}$$

(puisque x_n tend vers 0) et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

3❧ On reprend l'équation qui définit x_n sous une autre forme :

$$x_n = \ell n\, x_n + \ell n\, n = \ell n(e^n x_n).$$

Or on sait que $\ell n(1+u) \sim u$ lorsque u tend vers 0 et que $e^n x_n$ tend vers 1. Par conséquent,

$$e^n x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$$

et donc

$$x_n - e^{-n} \sim x_n e^{-n} \sim e^{-2n}.$$

Autrement dit,

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}).$$

✍ *On peut en fait calculer un développement asymptotique de x_n aussi précis qu'on le souhaite ! En effet, l'équation étudiée équivaut à*

$$x e^{-x} = e^{-n}$$

et la fonction $g = [x \mapsto e^{-x}]$ réalise une bijection (croissante, cette fois) de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $[0,1]$ sur $[0, e^{-1}]$ dont la réciproque est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, e^{-1}[$ puisque

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad g'(x) = e^{-x}(1-x) > 0.$$

D'après le Théorème de Taylor-Young, la réciproque g^{-1} admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$g^{-1}(u) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(g^{-1})^{(k)}(0)}{k!} \cdot u^k + o(u^p) \underset{u \to 0}{=} a_1 u + \cdots + a_p u^p + o(u^p).$$

Comme $x_n = g^{-1}(e^{-n})$, on en déduit que

$$x_n \underset{n \to +\infty}{=} a_1 e^{-n} + \cdots + a_p e^{-pn} + o(e^{-pn}).$$

Il est clair que $g(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$ au voisinage de 0. On peut en déduire que

$$g^{-1}(u) = u + u^2 + \frac{3}{2}u^3 + o(u^3)$$

au voisinage de 0 et donc que

$$x_n = e^{-n} + e^{-2n} + \frac{3}{2}e^{-3n} + o(e^{-3n}).$$

Pour les curieux, je précise que $g^{-1}(u) = -W_0(-u)$ où W_0 est la branche principale de la fonction de Lambert.