RMS 2022 [1150]

> *Soit* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^\top.A = A.A^\top$*. On suppose qu'il existe un entier* $p \geqslant 2$ *tel que* $A^p = 0_n$*. En considérant la matrice* $B = A^\top.A$*, démontrer que* $A = 0_n$*.*

Comme les matrices A et $A^\top$ commutent,

$$B^p = (A^\top)^p.A^p = 0_n.$$

Or la matrice B est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral). Étant diagonalisable et n'admettant que 0 pour valeur propre, la matrice B est donc nulle.

Pour toute matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc

$$0 = X^\top.B.X = (AX)^\top.(AX) = \|AX\|^2.$$

Par conséquent, $AX = 0$ pour *toute* matrice colonne X et donc $A = 0_n$.