RMS 2022 [1208]

> *Soient f et g, deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie E. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que f et g ont un vecteur propre commun.*

Puisque E est un espace vectoriel *complexe* de dimension $n \geqslant 1$, le polynôme caractéristique de f est scindé et f admet donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

Le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - \lambda I)$ est stable par g (puisque f et g commutent). L'endomorphisme g_λ, induit par restriction de g à ce sous-espace stable, est donc bien défini.

Comme $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda I) \geqslant 1$, le degré du polynôme caractéristique de g_λ est supérieur à 1 et ce polynôme est donc scindé. Donc g_λ admet au moins une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ et il existe un vecteur *non nul* $x_0 \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$ tel que

$$g(x_0) = g_\lambda(x_0) = \mu \cdot x_0.$$

Ce vecteur x_0 est donc un vecteur propre commun à f (associé à λ) et à g (associé à μ).

✍ *On peut aller plus loin et démontrer (par récurrence sur la dimension de E par exemple) qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et de g sont toutes les deux triangulaires supérieures.*