RMS 2022 [1217-817]

On considère une série $\sum u_n$ *de terme général strictement positif.*

$\boxed{1}$ *On suppose que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+3}$$

et on pose $v_n = n^2 u_n$.
Étudier la nature de la série $\sum \ln(v_{n+1}/v_n)$. *En déduire celle de la série* $\sum u_n$.

$\boxed{2}$ *Généralisation : en supposant que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

étudier la nature de la série $\sum u_n$.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2 \cdot \frac{n+1}{n+3} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2 \cdot \Big(1+\frac{2}{n+1}\Big)^{-1}.$$

Par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \Big[1+\frac{2}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] \cdot \Big[1-\frac{2}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] = 1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On en déduit que

$$\ln\frac{v_{n+1}}{v_n} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et donc que la série télescopique $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ est (absolument) convergente.

Donc la suite de terme général $\ln v_n$ converge vers un réel λ et, par composition de limites, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^\lambda > 0$. Autrement dit,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^\lambda}{n^2},$$

ce qui prouve que la série $\sum u_n$ converge (absolument).

$\boxed{2}$ On pose cette fois $v_n = n^\alpha u_n$ et, comme précédemment,

$$\ln\frac{v_{n+1}}{v_n} = \alpha\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big[1-\frac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

On en déduit encore que la série $\sum \ln\frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge et donc qu'il existe un réel $c > 0$ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n^\alpha}.$$

D'après le Théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ est alors convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.