RMS 2022 [759]

Soit φ, une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(P^{-1}AP) = \varphi(A).$$

Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{tr}$.

✍ *Pour se lancer dans la démonstration qui suit, il faut commencer par traduire l'énoncé : deux matrices semblables ont toujours même image par φ.*

On note, comme de coutume, $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$) les matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$. Pour $i \neq j$, la matrice $D + E_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Cette matrice est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D (mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités).

Par hypothèse, $\varphi(D + E_{i,j}) = \varphi(D)$ et par linéarité de φ,

$$\forall\, i \neq j, \quad \varphi(E_{i,j}) = 0.$$

❧ Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, les matrices $E_{1,1}$ et $E_{i,i}$ sont semblables : la matrice de permutation

$$P_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $P_{1,i}^{-1} E_{i,i} P_{1,i} = E_{1,1}$ et par conséquent, $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$.

✍ *Autre point de vue : la matrice $E_{1,1}$ représente l'application linéaire*

$$[(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, 0, \ldots, 0)]$$

dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ et la matrice $E_{i,i}$ représente cette même application linéaire dans la base

$$(e_i, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_1, e_{i+1}, \ldots, e_n).$$

En posant $\lambda = \varphi(E_{1,1})$, on a donc

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, \varphi(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \lambda = \lambda \,\mathrm{tr}\, A$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.