RMS 2022 [755]

> *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. *On suppose que*
>
> $$\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(A + kB) = \pm 1.$$
>
> **1** *Démontrer que la matrice* A *est inversible.*
> **2** *Démontrer que* $\det B = 0$.

1 Pour $k = 0$, on a $\det A = \pm 1$, donc A est inversible en tant qu'élément de (l'algèbre) $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Cela dit, d'après les formules de Cramer,

$$A.\mathrm{Com}(A)^\top = \det A.I_n = \pm I_n.$$

Puisque les coefficients de la comatrice sont des déterminants de matrices extraites de A (et donc de matrices *à coefficients entiers*), la comatrice appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ et la matrice A est donc inversible dans l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

2 Supposons que $\det B \neq 0$. D'après la propriété de morphisme de det et l'hypothèse,

$$\forall\, k \in [\![0, 2n]\!], \quad \det(AB^{-1} + kI_n) = \frac{\pm 1}{\det B}.$$

Dans cette identité, le paramètre k prend $(2n + 1)$ valeurs et l'expression $\det(AB^{-1} + kI_n)$ prend au plus deux valeurs : cette expression prend donc l'une des valeurs au moins $(n + 1)$ fois.

Or l'application

$$\left[\lambda \mapsto \det(\lambda I_n + AB^{-1})\right]$$

est une application polynomiale de degré n : c'est le polynôme caractéristique de la matrice $-AB^{-1}$.

Si une application polynomiale prend $(n + 1)$ fois la même valeur, il n'y a que deux possibilités : ou bien elle est constante, ou bien son degré est au moins égal à $(n + 1)$. Quoi qu'il en soit, son degré ne peut pas être égal à n. Notre hypothèse est donc absurde, on a démontré que $\det B = 0$.