RMS 2022 [1139]

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1❧ *Calculer le rang de A. Quelle est la dimension du noyau de A ?*
2❧ *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
3❧ *Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?*
4❧ *Démontrer que A admet trois valeurs propres : 0, λ et $1-\lambda$.*
5❧ *En déduire un polynôme annulateur de A dont le degré est égal à 3.*

1❧ Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\operatorname{rg} A \geqslant 2$. Les colonnes $C_2, \dots, C_n$ sont proportionnelles, donc $\operatorname{rg} A = 2$.

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes, donc $\dim \operatorname{Ker} A = n-2$.

2❧ La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral).

3❧ Pour une matrice diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. Par conséquent, la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à $(n-2)$.

✍ *En général, la multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.*

4❧ Comme le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de A, que ce polynôme admet 0 pour racine de multiplicité $(n-2)$ et que ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (puisque A est diagonalisable), on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta).$$

Or la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc

$$1 = \operatorname{tr} A = (n-1)\times 0 + 1\cdot\alpha + 0\cdot\beta$$

donc $\alpha+\beta = 1$: on peut donc noter λ et $(1-\lambda)$, les deux valeurs propres non nulles de A.

✍ *Pour l'instant, on ne sait pas si $\lambda \neq 1/2$, donc rien ne prouve que ces deux valeurs propres soient distinctes.*

5❧ Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Donc

$$\mu_A = X(X-\lambda)(X-1+\lambda) \quad \text{ou} \quad \mu_A = X(X-1/2)$$

(selon que $\lambda \neq 1/2$ ou $\lambda = 1/2$). Par définition, le polynôme minimal est un polynôme annulateur.

Dans les deux cas, le polynôme

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda)$$

est un multiple du polynôme minimal et donc un polynôme annulateur.

✍ *En calculant les coefficients diagonaux de A^2, on trouve que*

$$\operatorname{tr}(A^2) = \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + \sum_{k=2}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)-3}{3}.$$

Comme A *est diagonalisable, on sait aussi que*

$$\mathrm{tr}(A^2) = (n-2)\cdot 0^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Donc les valeurs propres λ *et* $(1-\lambda)$ *sont les deux racines de l'équation*

$$2X^2 - 2X + 1 = \frac{n(2n+1)(n+1)-3}{3}.$$

On en déduit d'une part que

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X\cdot\Big(X^2 - X + 1 - \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\Big)$$

et d'autre part que $\lambda \neq 1/2$ *(puisque le terme constant, égal au produit des racines, est toujours négatif).*

Pour ceux que ce genre de précisions vaines amusent, les valeurs propres λ *et* $1-\lambda$ *sont*

$$\frac{1}{2}\cdot\Big(1 \pm \sqrt{\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3} - 3}\Big).$$