RMS 2022 [1113]

Soit $(E, \|\cdot\|)$, *un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère un endomorphisme* $u \in L(E)$ *tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant \|x\|$$

et on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

1❧ *Soit* $x \in \operatorname{Ker}(u - I)$*. Déterminer la limite de* $v_n(x)$*.*

2❧ *Soit* $x \in \operatorname{Im}(u - I)$*. Déterminer la limite de* $v_n(x)$*.*

3❧ *Démontrer que* $\operatorname{Ker}(u - I)$ *et* $\operatorname{Im}(u - I)$ *sont supplémentaires dans* E*.*

4❧ *Soit* p*, la projection sur* $\operatorname{Ker}(u - I)$ *parallèlement à* $\operatorname{Im}(u - I)$*. Démontrer que la suite* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* p*.*

1❧ Comme $u(x) = x$, alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad v_n(x) = x$$

donc la suite de terme général $v_n(x)$ converge dans ce cas vers x.

2❧ Si $x \in \operatorname{Im}(u - I)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad v_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big[u^{k+1}(y) - u^k(y)\big] = \frac{u^n(y) - y}{n}.$$

Par inégalité triangulaire et hypothèse sur u,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \big\|v_n(x)\big\| \leqslant \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n} \leqslant \frac{2\|y\|}{n}.$$

Par encadrement, on en déduit que la suite de terme général $v_n(x)$ converge vers 0_E.

3❧ Par hypothèse, u est un ENDOMORPHISME de E, espace vectoriel DE DIMENSION FINIE. D'après le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker}(u - I) + \dim \operatorname{Im}(u - I) = \dim E.$$

Par ailleurs, si $x \in \operatorname{Ker}(u - I) \cap \operatorname{Im}(u - I)$, alors la suite de terme général $v_n(x)$ converge vers x (première question) et vers 0_E (deuxième question). Par unicité de la limite, on en déduit que $x = 0_E$. On a ainsi démontré que

$$E = \operatorname{Ker}(u - I) \oplus \operatorname{Im}(u - I).$$

4❧ Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $L(E)$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie et toutes les normes sur $L(E)$ sont équivalentes : nous allons choisir une norme pour laquelle le résultat immédiat à démontrer.

❧ Puisque $\operatorname{Ker}(u - I)$ et $\operatorname{Im}(u - I)$ sont supplémentaires dans E, on peut considérer une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de $\operatorname{Im}(u - I)$ et une base $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_d)$ de $\operatorname{Ker}(u - I)$ et en déduire que la famille

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_d)$$

est une base de E.

Par définition de p,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad p(\varepsilon_k) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall\, r < k \leqslant d, \quad p(\varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

❧ Pour tout endomorphisme f de E, on pose alors

$$N_{\mathscr{B}}(f) = \sum_{k=1}^{d} \|f(\varepsilon_k)\|.$$

► Il n'y a qu'un nombre fini de termes et tous sont positifs, donc cette somme existe et est un réel positif.

► Par homogénéité de la norme sur E, $N_{\mathscr{B}}(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot N_{\mathscr{B}}(f)$.

► Si $N_{\mathscr{B}}(f) = 0$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad 0 \leqslant \|f(\varepsilon_k)\| \leqslant N_{\mathscr{B}}(f) = 0$$

donc l'image par f de chaque vecteur de la base $\mathscr{B}$ est le vecteur nul. Comme $\mathscr{B}$ est une base, cela prouve que f est bien l'endomorphisme nul. Donc $N_{\mathscr{B}}$ sépare les points.

► Par inégalité triangulaire dans E et comme le maximum est un majorant,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \|(f+g)(\varepsilon_k)\| \leqslant \|f(\varepsilon_k)\| + \|g(\varepsilon_k)\|$$

et en sommant pour $1 \leqslant k \leqslant d$ ces inégalités, on en déduit que $N_{\mathscr{B}}$ vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, f, g \in L(E), \quad N_{\mathscr{B}}(f+g) \leqslant N_{\mathscr{B}}(f) + N_{\mathscr{B}}(g).$$

Donc $N_{\mathscr{B}}$ est bien une norme sur $L(E)$.

❧ D'après les deux premières questions,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \lim_{n \to +\infty} v_n(\varepsilon_k) = 0_E = p(\varepsilon_k)$$
$$\text{et} \quad \forall\, r < k \leqslant d, \quad \lim_{n \to +\infty} v_n(\varepsilon_k) = \varepsilon_k = p(\varepsilon_k).$$

Par conséquent,

$$N_{\mathscr{B}}(v_n - p) = \sum_{k=1}^{d} \|p(\varepsilon_k) - v_n(\varepsilon_k)\|$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (somme de d suites de limite nulle), ce qui prouve que la suite d'endomorphismes $(v_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers le projecteur p (pour la norme $N_{\mathscr{B}}$ et DONC pour toutes les normes sur $L(E)$).