# RMS 2022 [1145]

*Soient $A$ et $B$, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On considère la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

**1❧** *Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et $B$.*

**2❧** *Démontrer que $M$ est diagonalisable si, et seulement si, $A$ est diagonalisable et $B = 0$.*

**1❧** Par définition,

$$M^1 = \begin{pmatrix} A^1 & 1.A^0.B \\ 0_n & A^1 \end{pmatrix}$$

et il est clair que

$$M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0.B \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

✍ *Sans l'hypothèse $AB = BA$, la démonstration par récurrence ne serait pas possible !*

On en déduit par combinaison linéaire que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A).B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

**2❧** D'après la question précédente, $P$ est un polynôme annulateur de $M$ si, et seulement si, $P(A) = P'(A).B = 0_n$.

❧ Si $M$ est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur $P$ qui est scindé à racines simples.

Si $P$ et $P'$ admettaient un facteur irréductible commun, ce serait un facteur de la forme $(X - \alpha)$ (irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ !) et dans ce cas, $\alpha$ serait une racine (au moins) double de $P$ : c'est impossible. Par conséquent, $P$ et $P'$ sont premiers entre eux.

On déduit alors de la relation de Bézout que la matrice $P'(A)$ est inversible et donc que $B = 0_n$.

❧ Réciproquement, si $A$ est diagonalisable et si $B = 0_n$, alors $A$ admet un polynôme annulateur $P$ scindé à racines simples et

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & O_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

donc $P$ est aussi un polynôme annulateur de $M$, ce qui prouve que $M$ est diagonalisable.

✍ *Variante : si $Q^{-1}AQ = \Delta$, alors*

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & \Delta \end{pmatrix}.$$