RMS 2022 [1140]

> *Soit* $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. *On suppose que* $M^4 = 4M^2$ *et que* 2 *et* -2 *sont des valeurs propres de* M.
>
> $\boxed{\textbf{1}❧}$ *Démontrer que* $\text{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}$.
>
> $\boxed{\textbf{2}❧}$ *La matrice* M *est-elle diagonalisable ?*

$\boxed{\textbf{1}❧}$ La matrice M admet $X^4 - 4X^2 = X^2(X-2)(X+2)$ pour polynôme annulateur. Or les valeurs propres de M se trouvent parmi les racines de tous les polynômes annulateurs de A, donc

$$\text{Sp}(M) \subset \{0, \pm 2\}.$$

$\boxed{\textbf{2}❧}$ On distingue deux cas.

❧ Si la matrice M est inversible, alors $M^2 = 4I_3$, donc elle admet le polynôme $(X-2)(X+2)$ pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme est scindé et que ses racines sont simples, on en déduit que la matrice M est diagonalisable.

❧ Si la matrice M n'est pas inversible, alors 0 est une valeur propre de M. Par conséquent, elle admet trois valeurs propres distinctes : 0, -2 et 2 et comme elle appartient à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable.

✍ *En dimension* $n \geqslant 4$, *on ne pourrait pas conclure puisque les deux matrices suivantes vérifient les hypothèses de l'exercice :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que seule la première est diagonalisable.