RMS 2022 [1123c]

Soient X, Y et Z, des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs a, b et c. On pose

$$U = X + Y \quad \textit{et} \quad V = Y + Z.$$

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de U et V.

✍ *Si U et V sont deux variables aléatoires de carré intégrable, alors leur coefficient de corrélation linéaire est défini par :*

$$\rho(U, V) = \frac{\mathbf{Cov}(U, V)}{\sigma(U).\sigma(V)}$$

(où $\sigma(X)$ est l'écart type de la variable aléatoire X).

D'après l'inégalité de Schwarz, le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1. D'après le cas d'égalité, il est égal à ± 1 si, et seulement si, il existe un couple réel $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que la combinaison linéaire $\alpha U + \beta V$ soit presque sûrement constante.

Comme X, Y et Z suivent une loi de Poisson, ce sont des variables aléatoires de carré intégrable. Par combinaisons linéaires, les variables aléatoires U et V sont aussi de carré intégrable, donc leur coefficient de corrélation linéaire est bien défini.

Par bilinéarité de la covariance,

$$\mathbf{Cov}(U, V) = \mathbf{Cov}(Y, Y) = \mathbf{V}(Y) = b.$$

puisque des variables aléatoires indépendantes sont décorrélées.

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme de leurs variances, donc

$$\sigma(U).\sigma(V) = \sqrt{\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)}\sqrt{\mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(Z)} = \sqrt{(a+b)(b+c)}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire de U et V est donc égal à

$$\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}.$$