# RMS 2022 [1123b]

> *Soient* $X$ *et* $Y$*, deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$*.*
>
> **1❧** *Quelle est la loi de* $X+Y$ *?*
>
> **2❧** *Déterminer la loi conditionnelle de* $X$ *sachant* $[X+Y=n]$*. Préciser l'espérance et la variance de cette loi.*

**1❧** D'après le cours (additivité de la loi de Poisson), la variable aléatoire $X+Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

**2❧** Comme $X+Y$ suit une loi de Poisson, on sait que $\mathbf{P}(X+Y=n)>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

La fonction $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, donc la loi conditionnelle de $X$ sachant $[X+Y=n]$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.

► Comme $Y$ est à valeurs positives, on a $X(\omega)\leqslant X(\omega)+Y(\omega)$ pour tout $\omega\in\Omega$. Pour tout entier $k>n$, on a donc

$$[X=k]\cap[X+Y=n]=\varnothing$$

et donc $\mathbf{P}(X=k\mid X+Y=n)=0$.

► Pour $0\leqslant k\leqslant n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k\mid X+Y=n)&=\frac{\mathbf{P}(X=k,X+Y=n)}{\mathbf{P}(X+Y=n)}=\frac{\mathbf{P}(X=k,Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)}\\&=\frac{\mathbf{P}(X=k)\,\mathbf{P}(Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)}\qquad\text{(par indépendance)}\\&=\binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^k\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)^{n-k}.\end{aligned}$$

❧ On reconnaît la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $p=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$. Par conséquent,

$$\mathbf{E}(X|X+Y=n)=n\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(X\mid X+Y=n)=n\cdot\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}.$$