RMS 2022 [1123a]

1❧ *Soient* X, *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{p}{n}\, \mathbf{P}(X = n-1).$$

Déterminer la loi de X.

2❧ *Calculer l'espérance de* $\frac{1}{1+X}$.

1❧ On démontre par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{p^n}{n!}\, \mathbf{P}(X = 0).$$

À un facteur près, on reconnaît la loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$, donc $\mathbf{P}(X = 0) = e^{-p}$.

2❧ Comme X est positive, la variable aléatoire $Y = \frac{1}{1+X}$ est bornée (ses valeurs sont comprises entre 0 et 1), donc c'est une variable aléatoire d'espérance finie et son espérance peut se calculer à l'aide de la Formule de transfert. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \cdot e^{-p}\, \frac{p^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-p}}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-p}}{p} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{p^\ell}{\ell!} \\
&= \frac{e^{-p}}{p} \cdot (e^p - 1) = \frac{1 - e^{-p}}{p}.
\end{aligned}$$