RMS 2022 [1201]

> *On étudie l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^n$ *représenté dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *par la matrice*
>
> $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$
>
> **1❧** *Calculer le rang et une base de l'image de* f.
>
> **2❧** *Soit* g, *l'endomorphisme induit par restriction de* f *au sous-espace* $\operatorname{Im} f$. *Démontrer que* g *est diagonalisable.*

1❧ Le rang de (1) (pour $n = 1$) et de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (pour $n = 2$) est égal à 1.

À partir de $n = 3$, les deux premières colonnes de M ne sont pas proportionnelles, donc son rang est au moins égal à 2. Les autres colonnes de M sont égales à C_1 ou à C_2, donc le rang de M est en fait égal à 2.

❧ L'image de M est engendrée par les colonnes de M. On en déduit que

$$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_2).$$

2❧ L'image d'un endomorphisme f est (toujours !) un sous-espace stable par f, donc l'endomorphisme g est bien défini. D'après le cours, si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par restriction de f à un sous-espace stable quelconque est également diagonalisable.

✍ *Une histoire de polynôme annulateur — mais si, mais si, mais si, vous vous en souvenez...*

❧ Si on ne se contente pas d'une telle réponse, on peut calculer

$$MC_2 = 2 \cdot C_1 = 0 \cdot C_2 + 2 \cdot C_1 \quad \text{et} \quad MC_1 = (n-2) \cdot C_2 + 2 \cdot C_1,$$

donc la matrice de g relative à la base (C_2, C_1) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n-2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est égal à

$$X^2 - 2X + 2(2-n),$$

donc B admet deux valeurs propres distinctes :

$$1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Pour chaque valeur propre λ de g, le sous-espace propre est une droite vectorielle (DEUX valeurs propres distinctes pour un endomorphisme du PLAN $\operatorname{Im} f$) et cette droite vectorielle est dirigée par le vecteur

$$(n-2) \cdot C_2 + \lambda \cdot C_1.$$

✍ *Pour trouver le noyau de* $B - \lambda I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, *il suffit de trouver une proportion entre les deux colonnes de cette matrice.*