RMS 2022 [1171]

On considère la fonction f *définie par*

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{\ell n\, x}{x-1}.$$

1 *Vérifier que* f *est prolongeable par continuité en* 1.
2 *Démontrer que* f *est intégrable sur* $I =]0,1[$.
3 *Donner le développement en série entière de* f *au voisinage de* 1.
4 *Calculer l'intégrale de* f *sur* I.

1 Il est clair que f est continue sur I. En posant $x = 1+h$ (avec $h \in]-1,0[$),

$$f(x) = \frac{\ell n(1+h)}{(1+h)-1} = \frac{\ell n(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1.$$

Donc f peut être prolongée en une fonction continue sur $]0,1]$ avec $f(1) = 1$.

2 La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert I.

Elle tend vers une limite finie au voisinage de 1 (comme on vient de le voir) et donc intégrable au voisinage de 1.

Lorsque x tend vers 0, on a $f(x) \sim \ell n\, x$. Comme $\ell n\, x$ est une fonction de référence intégrable au voisinage (droit !) de 0, on en déduit que f est intégrable au voisinage de 0.

Donc f est bien intégrable sur $]0,1[$.

3 On a déjà posé $h = x-1$ à la première question : pour $-1 < h < 0$,

$$\frac{\ell n(1+h)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{h^n}{n}$$

donc

$$\forall\, x \in]0,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n+1}.$$

4 Le changement de variable affine $x = 1+h$ nous montre que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(1+h)\,dh = \int_{-1}^0 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{h^n}{n+1}\,dh.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in]-1,0[$, on pose

$$\forall\, h \in]-1,0[, \quad u_n(h) = \frac{(-1)^n h^n}{n+1}.$$

Chaque fonction u_n est continue et intégrable sur $]-1,0[$; la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,0[$ et la somme de cette série est continue sur $]0,1[$ (on sait la calculer, elle est égale à $f(1-h)$). Enfin,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^0 \left|u_n(h)\right| dh = \int_0^1 \frac{h^n}{n+1}\,dh = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et on reconnaît le terme général d'une série convergente. D'après le Théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable sur $]0,1[$ (ce qu'on avait déjà démontré...) et

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_{-1}^0\frac{h^n}{n+1}\,dh = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$